Feuille de TD1

Systèmes dynamiques et théorème de récurrence de Poincaré

Exercice 1. [ensembles de Julia]
Soit $c \in \mathbb{C}$. On considère l'application

$$T : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^2 + c \end{array}$$

1. Montrer que les itérés de $z_0 \in \mathbb{C}$ tendent vers l'infini dès lors que z_0 est de module assez grand.
2. Montrer que l'ensemble J_c des points dont les itérés restent bornées est un compact non vide.
3. ($\star\star$) Montrer que J_c est connexe si et seulement s'il contient 0 (ou c).

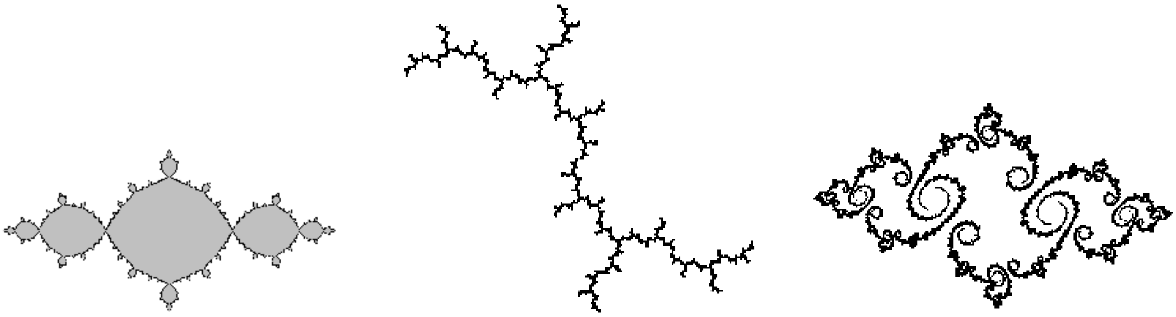

Figure 1 – Ensembles de Julia J_c pour certaines valeurs de c

Exercice 2. On dit qu'un espace topologique est *σ-compact* ou *dénombrable à l'infini* s'il est une union dénombrable de parties compactes. Soit X un tel espace.

1. Montrer que l'on peut exiger que la suite de compacts soit croissante.
2. Si X est de plus un espace métrique, montrer que l'on peut trouver une base dénombrable d'ouverts satisfaisant les conditions de la version topologique du théorème de récurrence de Poincaré.

Exercice 3. Trouver des mesures invariantes (ou montrer qu'il n'y en a pas) pour les applications suivantes :

$$T_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \cup \{\infty\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ z & \longmapsto & z/2 \end{array} \qquad T_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \cup \{\infty\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ z & \longmapsto & z^2 \end{array}$$

Que dit le théorème de récurrence de Poincaré appliqué à T_1 ?

Exercice 4. Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la transformation

$$T : \begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & [0,1[\\ x & \longmapsto & mx - \lfloor mx \rfloor \end{array}$$

1. Déterminer les mesures de probabilité invariantes.
2. À quoi correspond l'itération de cette transformation ?
3. Que dit le théorème de récurrence de Poincaré ?

EXERCICE 5. [TRANSFORMATION DU BOULANGER]
On considère l'application suivante, définie et à valeurs dans $[0,1[^2$:

$$f : (x,y) \longmapsto \begin{cases} \left(2x, \frac{y}{2} + \frac{1}{2}\right) & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \left(2x-1, \frac{y}{2}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f préserve une mesure de probabilité.
2. Exprimer le théorème de récurrence de POINCARÉ sur cette transformation.
3. ($\star$) Déterminer un point fixe de f et regarder les itérés des points proches de celui-ci.

EXERCICE 6. [TRANSFORMATION DE GAUSS]
On considère la transformation de GAUSS (associée à l'algorithme des fractions continues) :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & [0,1[& \longrightarrow & [0,1[\\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Montrer que la mesure

$$\mu : A \longmapsto \frac{1}{\ln 2} \int_A \frac{dx}{1+x}$$

est une mesure de probabilité préservée par φ.

À chercher pour la prochaine fois :)

EXERCICE 7. [FONCTIONS UNIMODALES]
Soit $\alpha \in]0,2]$. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} T : & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & \alpha\sqrt{x(1-x)} \end{array}$$

1. Dans cette question on suppose $\alpha = 2$.
   (a) Montrer que la mesure suivante
   $$\mu : A \longmapsto \int_A \frac{dx}{2\sqrt{1-x}}$$
   est une mesure de probabilité invariante sur les boréliens.
   Indication : on regardera ce qui se passe sur $]0, \frac{1}{2}[$ *et* $]\frac{1}{2}, 1[$ *et utiliser la symétrie de* T *par* $x \longmapsto 1-x$.
   (b) En déduire que LEBESGUE presque tout x est *récurrent*, c'est-à-dire qu'il existe une suite strictement croissante $(n_k)_k$ d'entiers telle que $\lim_{k\to+\infty} T^{n_k}(x) = x$.
2. Pour $\alpha < 2$, montrer qu'il n'existe pas de mesure invariante de la forme $h\,dx$ avec $h > 0$ p.p.
3. Pour $\alpha \leq 2$, trouver les points fixes de T.
4. Pour $\alpha < 1$, étudier la dynamique sur l'intervalle entre 0 et le second point fixe. Quels sont les points récurrents ? Quelles sont les mesures invariantes/ergodiques ?