

Devoir Maison 2

À rendre au plus tard sur le portail des études le vendredi 4 décembre 2020.

Une importance sera apportée au soin et à la rédaction.

Exercice 1 – Initiation à la transformation de Fourier .

On se place sur $\mathbb{R}^n$ muni de la tribu des boréliens. On désigne par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on définit $\mathcal{F}(f)$ par $\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi\langle x, \xi \rangle} f(x) dx$ lorsque cela a un sens.

1. Montrer que $\mathcal{F}(f)$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^n$, et bornée par $\|f\|_1$.
2. (parenthèse utile pour la suite) Montrer que si g est une fonction de $L^1(\mathbb{R})$, on peut trouver des suites $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$, la première tendant en décroissant vers $-\infty$, la seconde tendant en croissant vers $+\infty$, et telles que $\lim_{k \rightarrow +\infty} g(y_k) = 0$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} g(z_k) = 0$.
3. (*) On suppose de plus que f est de classe C^1 et que ses dérivées partielles sont dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.
Montrer qu'alors $\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\xi) = 2i\pi\xi_i \mathcal{F}(f)(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ et $1 \leq i \leq n$.
Indication : appliquer, en les justifiant, le théorème de Fubini puis une intégration par parties.
4. Soit φ une fonction de classe C^∞ à support compact. En considérant $\mathcal{F}(\varphi - \Delta(\varphi))$, où Δ est le laplacien, montrer qu'il existe une constante C telle que $|\mathcal{F}(\varphi)(\xi)| \leq \frac{C}{1+4\pi^2\|\xi\|^2}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.
5. Dédurre de ce qui précède que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $\mathcal{F}(f)(\xi)$ tend vers 0 lorsque $\|\xi\|$ tend vers $+\infty$.

Note : les résultats généraux et plus profonds sur la transformation de Fourier ainsi que sa définition sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ sont au programme du cours du second semestre : intégration et probabilités.

Exercice 2 – Lien entre convolution et transformée de Fourier .

1. Soient f et g deux fonctions dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. Montrer (en le justifiant) que $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \times \mathcal{F}(g)$.

Remarque : en d'autres termes, la transformée de Fourier est un morphisme (continu) de l'algèbre de Banach $(L^1(\mathbb{R}^n), +, \cdot, *)$ vers l'algèbre de Banach $(C_0^0(\mathbb{R}^n), +, \cdot, \times)$.

Dans la suite de cet exercice on admettra l'injectivité de la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$: $\mathcal{F}(f) = 0$ a pour unique solution $f = 0$.

2. Trouver toutes les solutions dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ de l'équation : $f * f = f$.
Remarque : la solution serait très différente pour la même équation dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.
3. Montrer qu'il n'y a pas d'élément neutre pour la loi de composition interne $*$ sur $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 3 – Convolution de mesures .

Soient μ et ν deux mesures boréliennes σ -finies sur $\mathbb{R}^n$ et s l'application somme : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

On pose, pour A borélien, $\mu * \nu(A) = \mu \otimes \nu(s^{-1}(A))$.

1. Montrer que cela définit une mesure borélienne, appelée *convolution*, qui n'est pas forcément finie sur les compacts, même si μ et ν le sont.
2. Montrer que $\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(A - t) d\nu(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \nu(A - t) d\mu(t)$ pour A borélien.
3. On suppose que μ et ν sont finies. Soit g une fonction borélienne bornée, montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} g d(\mu * \nu) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} g \circ s d(\mu \otimes \nu)$$

4. Montrer que l'opérateur de convolution est commutatif et associatif sur l'ensemble des mesures boréliennes de probabilité. Montrer que la mesure de Dirac en 0 est élément neutre.

Remarque : l'idée des approximations de l'unité est justement de s'approcher de la mesure de Dirac en 0.