Changement de variables

Exercice 1 – ***Intégrale de Gauss.*** 1. Montrer que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Calculer $\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\langle x, Ax\rangle\right)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 – . On considère les ouverts de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + 4y^2 < 4, x > 0, y > 0\}, \qquad G = \{(x,y) \in \Omega \mid y < x\},$$
$$\Omega' = \{(x',y') \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x' < 4, y' > 0\}, \qquad G' = \{(x',y') \in \Omega \mid y' < 1\}.$$

1. Montrer qu'il existe un difféomorphisme T de Ω dans Ω' qui envoie G sur G'.

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-4y^2}{4x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Montrer que f est borélienne, intégrable sur G et calculer son intégrale.
3. f est-elle intégrable sur Ω ?

Exercice 3 – . Pour $a > 0$, on pose $\Omega_a =]0, a[\times]0, +\infty[$.

1. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(u,v) = \begin{cases} \frac{\sin(u)}{u} e^{-v} & \text{si } u \neq 0 \\ e^{-v} & \text{sinon} \end{cases}$$

   Montrer que f est intégrable sur Ω_a.
2. Soit $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(x,y) = (x, xy)$. Montrer que T est un difféomorphisme sur Ω_a.
3. Calculer $\int_0^a \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et en déduire la valeur de $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 – ***Changement de variables sphérique.*** On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne. Pour quels réels α, les fonctions $||x||^{\alpha}\mathbb{1}_{\mathcal{B}(0,1)}$ et $||x||^{\alpha}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n\setminus\mathcal{B}(0,1)}$ sont-elles intégrables ?