

Théorème de Radon-Nikodym, Décomposition de Lebesgue & Dualité

Exercice 1 – Attention aux hypothèses. Dans cet exercice λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et ν la mesure de dénombrement.

1. Montrer que ν n'admet pas de décomposition de la forme donnée par le théorème de décomposition de Lebesgue. Quelle hypothèse de ce dernier est mise en défaut ?
2. Montrer que λ est absolument continue par rapport à ν , mais que l'on ne peut pas trouver de fonction comme dans le théorème de Radon-Nikodym. Quelle hypothèse de ce dernier est mise en défaut ?

Exercice 2 – Mesure équivalente à ses translatées. Soient λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et μ une autre mesure borélienne σ -finie sur $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la mesure μ est équivalente à la mesure μ_t définie par $\mu_t(A) = \mu(A + t)$, c'est-à-dire que μ et μ_t ont mêmes ensembles de mesure nulle.

1. Montrer que pour tout A borélien on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda(x - A) \, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A + t) \, d\lambda(t)$$

2. Prouver que μ et λ sont équivalentes. En déduire la forme de μ .

Exercice 3 – $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ n'est pas le dual de $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$. Dans cet exercice on souhaite démontrer que $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ n'est pas le dual de $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$.

1. Montrer que les fonctions en escalier (à support compact) sont denses dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. En déduire que $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ est séparable (possède une partie dénombrable dense).
On n'utilisera pas la densité des fonctions continues à support compact, mais seulement la régularité de la mesure de Lebesgue et la structure des ouverts de $\mathbb{R}$.
2. (★) Montrer qu'un espace vectoriel normé ayant un dual séparable est lui même séparable.
On utilisera une forme géométrique du théorème de Hahn-Banach, et si on le connaît pas, on admettra le résultat de cette question.
3. Conclure.