Devoir Maison 2

À rendre le **jeudi 25 novembre 2021**.

Une importance sera apportée au soin et à la rédaction.

Exercice 1 – ***Inégalité de Hardy***. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis et $p \in [1, +\infty[$ (on notera q son exposant conjugué). Soit $\varphi : X \times Y \to \mathbb{R}_+$ une fonction $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-mesurable, positive et $\mu \otimes \nu$-intégrable.

1. On pose pour tout $x \in X$,
$$\Phi(x) = \int_Y \varphi(x, y)\, \nu(\mathrm{d}y).$$
Justifier sans calculs le fait que Φ ainsi définie est une fonction $\mathcal{A}$-mesurable, μ-*p.p.* à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
2. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de la tribu $\mathcal{A}$, croissante pour l'inclusion et vérifiant $\bigcup_{n\geq 1} A_n = X$ et $\mu(A_n) < +\infty$ pour tout $n \geq 1$.
   (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$,
   $$\int_X \mathbb{1}_{\{\Phi\leq n\}\cap A_n}(x)\big(\Phi(x)\big)^p \mu(\mathrm{d}x) = \int_{X\times Y} \mathbb{1}_{\{\Phi\leq n\}\cap A_n}(x)\big(\Phi(x)\big)^{p-1} \varphi(x, y)\, \mu \otimes \nu(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y).$$
   (b) Montrer que pour tout $n \geq 1$,
   $$\int_X \mathbb{1}_{\{\Phi\leq n\}\cap A_n}(x)\big(\Phi(x)\big)^p \mu(\mathrm{d}x) \leq \left(\int_X \mathbb{1}_{\{\Phi\leq n\}\cap A_n}(x)\big(\Phi(x)\big)^p \mu(\mathrm{d}x)\right)^{\frac{1}{q}} \int_Y \left(\int_X \big(\varphi(x, y)\big)^p \mu(\mathrm{d}x)\right)^{\frac{1}{p}} \nu(\mathrm{d}y).$$
   (c) En déduire que pour tout $n \geq 1$,
   $$\|\mathbb{1}_{\{\Phi\leq n\}\cap A_n}\Phi\|_{\mathbb{L}^p(\mu)} \leq \int_Y \|\varphi_y\|_{\mathbb{L}^p(\mu)}\, \nu(\mathrm{d}y),$$
   où $\varphi_y(x) := \varphi(x, y)$ désigne la *section de φ au-dessus de y*.
   (d) Établir l'inégalité
   $$\|\Phi\|_{\mathbb{L}^p(\mu)} \leq \int_Y \|\varphi_y\|_{\mathbb{L}^p(\mu)}\, \nu(\mathrm{d}y).$$
   (e) Justifier pourquoi on a introduit les $A_n \cap \{\Phi \leq n\}$ à la question 2a.
   (f) Montrer que si $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mu \otimes \nu)$ et si ν est une mesure finie, alors
   $$\int_Y \|\varphi_y\|_{\mathbb{L}^p(\mu)}\, \nu(\mathrm{d}y) < +\infty.$$
3. *Cette question peut être traitée à partir du résultat de la seule question 2d. On pourra par ailleurs utiliser un théorème de changement de variable pour l'intégrale de Lebesgue similaire à celui de l'intégrale de Riemann si celui-ci est correctement justifié.*
Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue. Pour tout $A > 0$, on pose $\varphi(x, y) := f(xy)\mathbb{1}_{[0,A]}(x)\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$, $\mu = \lambda$ et $\nu = \lambda_{|[0,1]}$.
   (a) Montrer que φ est positive et $\lambda \otimes \lambda_{|[0,1]}$-intégrable, puis calculer $\Phi(x)$ en tout point $x \in \mathbb{R}$ et $\|\varphi_y\|_{\mathbb{L}^p(\lambda)}$ en tout point $y \in]0, 1]$.
   (b) En déduire l'*Inégalité de Hardy* : pour tout $p \in]1, +\infty[$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$,
   $$\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p \qquad \text{où} \qquad F(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(u)\, \mathrm{d}u, \quad x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Exercice 2 – ***Un problème***. Soit $[0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue λ. On choisit une base hilbertienne $(f_n)_{n\geq 0}$ de l'espace de Hilbert $\mathbb{L}^2([0,1],\lambda)$, dont on notera le produit scalaire $\langle f, g\rangle$.

1. Dire pourquoi cet espace possède une base hilbertienne dénombrable.
   On pose pour tout $t \in [0,1]$,
   $$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(t)|^2.$$
2. Soit B un borélien de $[0,1]$. Montrer que pour tout α dans $[0, \lambda(B)]$, on peut trouver un borélien B_α contenu dans B et tel que $\lambda(B_\alpha) = \alpha$.
3. Soit B un borélien de $[0,1]$. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, on a
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\langle \mathbb{1}_B, f_n\rangle f_n(t)\right| \leq \lambda(B)^{\frac{1}{2}} S(t)^{\frac{1}{2}}.$$
4. Montrer que $\lambda(B) \leq \lambda(B)^{\frac{3}{2}}\ \sup_{t\in B} S(t)^{\frac{1}{2}}$.
5. Déduire de la question 2. que pour tout borélien B tel que $\lambda(B) > 0$, $\sup_{t\in B} S(t)^{\frac{1}{2}} = +\infty$.
6. Montrer que $S(t) = +\infty$ presque partout.
7. Donner un exemple d'espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ tel que $\mathbb{L}^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ admette une base hilbertienne infinie telle que $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(t)|^2 = 1$ partout. Peut-on construire un tel exemple en mesure finie ?
8. Donner un exemple d'espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ de mesure finie tel que $\mathbb{L}^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ admette une base hilbertienne infinie telle que $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(t)|^2 < +\infty$ partout.

Exercice 3 – ***Quelques calculs pour finir***. On définit une fonction $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty]$ par

(a) $\mu(A) = 0$ si A est une partie finie ou dénombrable ; et

(b) $\mu(A) = +\infty$ sinon.

Soit K l'ensemble triadique de Cantor, et posons $C := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x - y \in K\right\}$.

1. Vérifier que μ est une mesure.
2. Montrer que $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
3. Calculer les intégrales
   $$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_C(x,y)\, \mu(\mathrm{d}y) \right) \lambda(\mathrm{d}x) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_C(x,y)\, \lambda(\mathrm{d}x) \right) \mu(\mathrm{d}y)$$
4. Conclure.