

Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice 1 – Étude de fonction. Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue-intégrable, et soit $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction définie pour tout $t \geq 0$ par $F(t) := \int_{[0,1]} \sqrt{\varphi(x)^2 + t} \, dx$.

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que F soit dérivable en 0.

Exercice 2 – Un calcul de primitive. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et μ une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ne chargeant pas t_0 (i.e. $\mu(\{t_0\}) = 0$), et une fonction $f \in \mathcal{L}_\mathbb{R}^1(\mu)$ telle que la fonction $(x \mapsto xf(x)) \in \mathcal{L}_\mathbb{R}^1(\mu)$. On pose

$$F(t) := \int_{\mathbb{R}} (t - x)^+ f(x) \, \mu(dx).$$

Montrer que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}_+$ et est dérivable en t_0 de dérivée

$$F'(t_0) = \int_{]-\infty, t_0]} f(x) \, \mu(dx).$$

Exercice 3 – Transformée de Laplace. Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$L(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{xt} \, d\mu(t).$$

1. Montrer que l'ensemble $D = \{x \in \mathbb{R}, L(x) < +\infty\}$ est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que L est convexe sur D .
3. Montrer que L est de classe C^∞ sur l'intérieur de D .

Exercice 4 – Initiation à la transformation de Fourier. On se place sur $\mathbb{R}$ muni de la tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue. Pour $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, on définit $\mathcal{F}(f)$ par $\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\xi} f(x) \, dx$ lorsque cela a un sens.

1. Montrer que $\mathcal{F}(f)$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, et bornée par $\|f\|_1$.
2. (Parenthèse utile pour la suite) Montrer que si g est une fonction de $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, on peut trouver des suites $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$, la première tendant en décroissant vers $-\infty$, la seconde tendant en croissant vers $+\infty$, et telles que $\lim_{k \rightarrow +\infty} g(y_k) = 0$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} g(z_k) = 0$.
3. (*) On suppose de plus que f est de classe C^1 et que sa dérivée est dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer qu'alors $\mathcal{F}(f')(\xi) = 2i\pi\xi\mathcal{F}(f)(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.
4. Soit φ une fonction de classe C^∞ à support compact. En considérant $\mathcal{F}(\varphi - \varphi'')$, montrer qu'il existe une constante C telle que $|\mathcal{F}(\varphi)(\xi)| \leq \frac{C}{1+4\pi^2|\xi|^2}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.
5. Dédire de ce qui précède que si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f)(\xi)$ tend vers 0 lorsque $|\xi|$ tend vers $+\infty$.

Note : les résultats généraux et plus profonds sur la transformation de Fourier ainsi que sa définition sur $L^2(\mathbb{R})$ sont au programme du cours du second semestre : intégration et probabilités.

Exercice 5 – Transformée de Fourier d'une mesure. Soit μ une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \, d\mu(t)$$

est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On suppose dorénavant que $\frac{2f(0)-f(h)-f(-h)}{h^2}$ a une limite finie lorsque h tend vers 0.

2. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} t^2 \, d\mu(t)$ est finie.
3. Montrer que f est de classe C^2 .

Exercice 6 – Convolution. 1. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ et φ une fonction dérivable, bornée à dérivée bornée sur $\mathbb{R}$. On définit la **convolution** de f par φ , et on note $f * \varphi$, la fonction $f * \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $y \in \mathbb{R}$ par

$$f * \varphi(y) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(y-x)f(x) \lambda(dx).$$

Montrer que $f * \varphi$ est bien définie, bornée et dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner l'expression de sa dérivée.

2. Soit $I =]0, 1[$. Soit f une fonction de $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ nulle en dehors de I . Pour $h > 0$, on pose

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt.$$

Montrer que f_h est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 – Intégrale de Gauss. Calculer l'intégrale de Gauss $I := \int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2} dx$.

Indication : introduire les fonctions $f : x \mapsto (\int_0^x e^{-t^2} dt)^2$ et $g : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et exprimer $f + g$.



Attention : Prochain Cours le Lundi 18 Octobre 2021 de 13h30 à 15h30
Prochain TD le Mardi 19 Octobre 2021 de 13h30 à 15h30

