Mesure de Lebesgue & Espaces $\mathbb{L}^p$

Exercice 1 – ***Deux p'tites propriétés***. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Soient deux fonctions $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}_+$ mesurables positives telles que $fg \geq 1$. Montrer que $\int_X f \, \mathrm{d}\mu \int_X g \, \mathrm{d}\mu \geq \mu(X)^2$.
2. Montrer que s'il existe une fonction mesurable $f : X \to \mathbb{R}_+^*$ telle que f et $\frac{1}{f}$ sont μ-intégrables, alors $\mu(X)$ est finie.

Exercice 2 – ***Quelques généralités***. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit f une fonction mesurable sur X, non presque partout nulle. On note E l'ensemble des $p \in [1, +\infty[$ tels que $f \in \mathbb{L}^p(\mu)$ et on note $\varphi(p) = \int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu$.

1. Montrer que E est un intervalle.
2. Montrer que E peut être n'importe quel intervalle (on prendra bien compte de distinguer les bornes ouvertes et fermées !).
3. Montrer que $\ln(\varphi)$ est convexe sur E.
4. Montrer que φ est continue sur E.
5. Supposons E non vide. Montrer que $\|f\|_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty$.

Exercice 3 – ***La norme infine comme limite***. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesurable de mesure finie et $f \in \mathbb{L}^\infty(\mu)$ tel que $\|f\|_\infty > 0$. Posant $\alpha_n = \int_X |f|^n \, \mathrm{d}\mu$ pour $n \geq 0$, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \|f\|_\infty.$$

Exercice 4 – ***Injection*** $\mathbb{L}^q \hookrightarrow \mathbb{L}^p$. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$. Soit $1 \leq p < q \leq \infty$. Montrer que l'injection canonique $j : \mathbb{L}^q \to \mathbb{L}^p$ est une application linéaire continue et calculer sa norme.

Exercice 5 – ***Invariance par rotation***. Montrer que pour tout ensemble $B \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, et tout endomorphisme u de $\mathbb{R}^d$, on a

$$\lambda_d\big(u(B)\big) = |\det(u)|\, \lambda_d(B).$$

Exercice 6 – ***Critère de Riemann-intégrabilité***. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. L'**oscillation** de f en $x \in [a, b]$ est définie par

$$\omega(x) := \lim_{h\to 0^+} \sup_{y,z\in I_h(x)} |f(y) - f(z)|,$$

où $I_h(x) := [a, b] \cap [x - h, x + h]$.

1. Montrer que f est continue en x si, et seulement si, $\omega(x) = 0$.
2. Soient $(\sigma_n := [a = x_n^0 < x_n^1 < \cdots < x_n^n = b])_{n\geq 1}$ une suite croissante de subdivisions dont le pas tend vers 0, et les suites de fonctions en escalier définies par

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} \inf\limits_{I_n^k} f & \text{si } x \in I_n^k := [x^k, x_n^{k+1}[,\ 0 \leq k < n \\ 0 & \text{si } x = b \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi_n(x) := \begin{cases} \sup\limits_{I_n^k} f & \text{si } x \in I_n^k,\ 0 \leq k < n \\ 0 & \text{si } x = b. \end{cases}$$

   Montrer que les suites $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ et $(\psi_n)_{n\geq 1}$ sont monotones et que

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n - \lim_{n\to+\infty} \psi_n = \omega \quad \lambda\text{-p.p.}.$$

3. En déduire que f est Riemann-intégrable si, et seulement si, f est continue λ-p.p..

À chercher pour la prochaine fois :)

Exercice 7 – $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$ ***n'est pas séparable***.

1. Soit E un ensemble. On suppose qu'il existe une famille $(O_i)_{i\in I}$ telle que :
   (a) pour tout $i \in I$, O_i est un ouvert non vide de E,
   (b) $O_i \cap O_j = \emptyset$ si $i \neq j$,
   (c) I n'est pas dénombrable.

   Montrer que E n'est pas séparable.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on pose $f_x = \mathbb{1}_{\mathcal{B}(x,1)}$ où $\mathcal{B}(x, 1) \subset \mathbb{R}^d$ est la boule fermée de centre x et de rayon 1. En utilisant la famille d'ouverts $(O_x)_{x\in\mathbb{R}^d}$ avec

$$O_x = \left\{ f \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^d, \lambda_d),\ \|f - f_x\|_\infty < \frac{1}{2} \right\},$$

   montrer que $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$ n'est pas séparable.