# Espaces $\mathbb{L}^p$

**Exercice 1 –** ***Pour s'échauffer.*** 1. La convergence dans $\mathbb{L}^p(\mu)$ de fonctions de $\mathcal{L}^p(\mu)$ entraîne-t-elle la convergence $\mu$-p.p. ?

2. La convergence $\mu$-p.p. de fonctions de $\mathcal{L}^p(\mu)$ entraîne-t-elle la convergence dans $\mathbb{L}^p(\mu)$ ?
3. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(X,\mathcal{T},\mu)\cap\mathbb{L}^q(X,\mathcal{T},\mu)$, avec $p,q\in[1,+\infty[$ et $p\neq q$. On suppose que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $\mathbb{L}^p$ et que $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^q$. Montrer que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $\mathbb{L}^q$.
   Le résultat persiste-t-il si la suite n'est plus de Cauchy ?

**Exercice 2 –** ***Super-Hölder.*** Soient $p,q\in[1,+\infty]$ et $r$ défini par $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$. Montrer que pour toutes fonctions $f\in\mathbb{L}^p(X,\mu)$ et $g\in\mathbb{L}^q(X,\mu)$, on a $fg\in\mathbb{L}^r(X,\mu)$ et

$$\|fg\|_r\leq\|f\|_p\|g\|_q.$$

**Exercice 3 –** ***Continuité de l'opérateur translation sur*** $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^d)$. Pour toute fonction $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ et pour $h\in\mathbb{R}^d$, on définit la fonction $\tau_h f$ par $(\tau_h f)(x)=f(x+h)$ et on pose $|h|=\|h\|_\infty$. On notera également $\mathbb{L}^p=\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^d,\lambda_d)$.

1. Soit $1\leq p<\infty$.
   (a) Montrer que pour tout $h\in\mathbb{R}$, $\tau_h$ définit une isométrie de $\mathbb{L}^p$.
   (b) Soit $g\in C_c(\mathbb{R}^d)$ une fonction continue à support compact. Montrer que
   $$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall(a,b)\in(\mathbb{R}^d)^2,\ \Big(|a-b|<\delta\implies\|\tau_a g-\tau_b g\|_p<\varepsilon\Big).$$
   (c) En utilisant la densité de $C_c(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{L}^p$, montrer que si $f\in\mathbb{L}^p$, on a
   $$\lim_{h\to 0}\|\tau_h f-f\|_p=0.$$
   (d) *Application.* Soit $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\lambda_d(A)>0$. Montrer qu'il existe un intervalle non-trivial inclus dans $A-A=\{a-b\ :\ a,b\in A\}$.
2. Montrer que si $f\in\mathbb{L}^p$ avec $1\leq p<+\infty$, alors $\lim\limits_{|h|\to+\infty}\|\tau_h f-f\|_p=2^{\frac{1}{p}}\|f\|_p$.
3. Donner un contre-exemple simple qui montre que le résultat (1c) n'est pas valable pour $\mathbb{L}^\infty$.

**Exercice 4 –** ***Lemme de Scheffé.*** Soient $p\in[1,+\infty[$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathbb{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$ qui converge $\mu$-p.p. vers une fonction $f\in\mathbb{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\|f_n-f\|_p=0\quad\Longleftrightarrow\quad\lim_{n\to+\infty}\|f_n\|_p=\|f\|_p.$$

**Exercice 5 –** ***Lemme de Hadamard.*** Soit $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, où $\lambda$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soient $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ une fonction intégrable, et $F:[-1,1]\to\mathbb{R}$ définie par

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $F$ est continue sur $[-1,1]$.
2. On suppose dans cette question que $f$ est continue. Montrer que $F$ est de classe $C^1$ et déterminer sa dérivée.
3. *(Lemme de Hadamard)* Soit $\varphi:[-1,1]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$. Déduire de la question précédente qu'il existe une fonction continue $\theta:[-1,1]\to\mathbb{R}$ telle que
   $$\forall x\in[-1,1],\quad\varphi(x)=\varphi(0)+x\theta(x).$$
4. Montrer que la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$. En déduire dans quels cas la fonction $x\mapsto\frac{\varphi(x)}{x}$ est intégrable sur $[-1,1]$.

5. Montrer que la quantité
$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$
converge quand $\varepsilon \to 0$.

**Exercice 6 –** ***Emboîtements des espaces de Lebesgue***. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré où $\mu$ est une mesure positive.

1. Soient $1 \leq p_1 \leq p \leq p_2 \leq +\infty$. Montrer que
$$\mathbb{L}^p(X,\mu) \subset \mathbb{L}^{p_1}(X,\mu) + \mathbb{L}^{p_2}(X,\mu).$$
2. Soient $1 \leq p < q \leq +\infty$. Montrer que pour tout $p \leq r \leq q$, on a
$$\mathbb{L}^p(X,\mu) \cap \mathbb{L}^q(X,\mu) \subset \mathbb{L}^r(X,\mu).$$

**Exercice 7 –** ***Lemme de Riemann-Lebesgue***. Soit $I$ un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$, et $f \in \mathbb{L}^1(I)$. Montrer que :
$$\lim_{|\lambda| \to +\infty} \int_I f(t) e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t = 0.$$

---

**<u>Attention</u> : La prochaine fois, c'est Partiel**