Fubini & Convolution

Exercice 1 – ***Un calcul pour s'échauffer***. Soit f la fonction définie sur $[0,1]^2$ par $f(x,y) := \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Calculer

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Que peut-on en déduire ?

Exercice 2 – ***Mesures de l'épigraphe et du graphe d'une fonction***. Soit f une fonction mesurable positive définie sur $\mathbb{R}$. Dire si les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont mesurables, et si oui calculer leur mesure :

1. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq y \leq f(x)\}$ (épigraphe de f) ; et
2. $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = f(x)\}$ (graphe de f).

Exercice 3 – . Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, avec μ une mesure σ-finie. Soient $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable, et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante de classe C^1 telle que $g(0) = 0$. Montrer que

$$\int_X g \circ f \,\mathrm{d}\mu = \int_0^{+\infty} g'(t)\mu(\{f \geq t\})\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4 – ***Inégalité FKG***. Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de probabilité. Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ deux fonctions positives telles que $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et f, g sont monotones de même monotonie. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} fg \,\mathrm{d}\mu \geq \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\mu \int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}\mu.$$

Indication : On pourra considérer la fonction $\varphi(x,y) := (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))$.

Exercice 5 – ***Inégalité de Hardy-Littlewood-Pólya***. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

1. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable et positive, et soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $G(x) := \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}_+} fg \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}_+} G \,\mathrm{d}(-f).$$
Indication : On pourra commencer par traiter le cas où g est l'indicatrice d'un borélien.
2. Soient quatre réels $p, q, a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $pa + 1 > 0$ et $qb + 1 > 0$.
Démontrer l'*inégalité de Hardy-Littlewood-Pólya* :
$$\int_0^{+\infty} x^{a+b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{(pa+1)^{\frac{1}{p}}(qb+1)^{\frac{1}{q}}}{a+b+1} \left(\int_0^{+\infty} x^{pa} f(x)\,\mathrm{d}x \right) \left(\int_0^{+\infty} x^{qb} f(x)\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Exercice 6 – ***Volume des boules unités (début)***. On note C_d le volume d'une boule euclidienne de rayon 1 dans $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue. Montrer la relation de récurrence :

$$\forall d \in \mathbb{N}^*, \quad C_{d+1} = C_d \int_0^1 (1-u)^{d/2} u^{-1/2}\,\mathrm{d}u.$$

Exercice 7 – ***Volume des boules unités (fin)***. *On pourra dans cet exercice utiliser le théorème de changement de variable qui sera vu dans un prochain cours.*
On appelle *fonction eulérienne de première espèce* la fonction $B :]0,+\infty[^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(p,q) \in]0,+\infty[^2$ par

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que B est bien définie et est C^1 sur $]0,+\infty[^2$.
2. Montrer que

$$\forall (p,q) \in]0,+\infty[^2, \quad B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi)^{2p-1}\cos(\varphi)^{2q-1}\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{+\infty} \frac{2u^{2p-1}}{(1+u^2)^{p+q}}\,\mathrm{d}u.$$

   En déduire la valeur de $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.
3. Montrer la *Formule des compléments* :

$$\forall (p,q) \in]0,+\infty[^2, \quad B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

   En déduire $\Gamma(\frac{1}{2})$.
4. Calculer (avec Γ) les constantes $(C_d)_{d\in\mathbb{N}^*}$ de l'exercice précédent.

Exercice 8 – ***Convolution & Indicatrices***. 1. Soient A et B des parties mesurables de $\mathbb{R}^n$, de mesure finie non nulle. Montrer que la convolée de leurs fonctions caractéristiques est une fonction continue non nulle. En déduire que $A+B$ contient une boule non triviale.

2. On définit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-y \notin \mathbb{Q}\}$. Montrer que E ne contient pas d'ensemble $A \times B$ où A et B sont deux ensembles mesurables tels que $\lambda(A), \lambda(B) > 0$.
   Indication : On pourra commencer par montrer que la fonction φ définie par $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x+y)\mathbb{1}_B(y)\,dy$ est continue avec $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx > 0$.
3. (a) Soient $f,g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions boréliennes positives. Montrer que $f*g$ est semi-continue inférieurement, *i.e.* pour tout $M \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{f*g \leq M\}$ est fermé.
   (b) En déduire le *théorème de Steinhaus* : Si A est un borélien de $\mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue positive, alors $A - A := \{x-y : x,y \in A\}$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$.

Exercice 9 – ***Une autre inégalité***. Soient $1 \leq p \leq +\infty$. Montrer que pour tout $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ on a que $f*g$ est définie presque partout et

$$\|f*g\|_p \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_1.$$

Exercice 10 – ***Convolution & Dérivée***. Soient $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^d,\mathbb{K})$, et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ une fonction de $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ (*i.e.* pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^d$, $f \cdot \mathbb{1}_K \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$). Montrer que $f*\varphi \in C^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{K})$ et que

$$\forall 1 \leq i \leq d, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(f*\varphi) = f * \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right).$$