Mesures $\mathbb{C}$omplexes, Théorème de Radon-Nikodym & Décomposition de Lebesgue

Exercice 1 – ***Pour s'échauffer***. On se place sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. Montrer qu'il n'existe pas de partie $A \in \mathcal{B}([0,1])$ telle que pour tout intervalle I de $[0,1]$:

$$\lambda(A \cap I) = \frac{1}{2}\lambda(I)\,.$$

Indication : On pourra supposer que A existe et introduire la mesure $\mu = \mathbb{1}_A \cdot \lambda$.

Exercice 2 – ***Attention aux hypothèses***. Soit $\mathbb{R}$ muni des mesures λ de Lebesgue et μ de dénombrement.

1. Montrer que μ n'admet pas de décomposition de la forme donnée par le théorème de décomposition de Lebesgue. Quelle hypothèse de ce dernier est mise en défaut ?
2. Montrer que λ est absolument continue par rapport à μ, mais qu'il n'existe pas de fonction mesurable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\lambda = f \cdot \mu$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 3 – ***La mesure du diable***. Trouver une mesure étrangère à la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ et sans atome.
Rappel : On dit que deux mesures μ et ν sont étrangères, *et on note $\mu \perp \nu$, s'il existe un ensemble mesurable E tel que μ soit portée par E, et ν par E^c, c'est-à-dire si $\mu(E^c) = 0$ et $\nu(E) = 0$.*

Exercice 4 – ***La décomposition de Jordan est minimale***. Soit μ une mesure réelle sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A})$. On rappelle que la *décomposition de Jordan* de μ est donnée par

$$\mu^+ = \frac{|\mu| + \mu}{2} \qquad \text{et} \qquad \mu^- = \frac{|\mu| - \mu}{2}\,.$$

1. Montrer qu'il existe $\{A^+, A^-\}$ une partition de X composée d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que la mesure $\mu^\pm$ est portée par $A^\pm$ et
$$\forall E \in \mathcal{A}, \quad \mu^\pm(A) = \pm\mu(E \cap A^\pm)\,.$$
2. Montrer que la décomposition de Jordan est minimale au sens que si μ_1 et μ_2 sont deux mesures positives bornées telles que $\mu = \mu_1 - \mu_2$, alors $\mu_1 \geq \mu^+$ et $\mu_2 \geq \mu^-$.

Exercice 5 – ***Décomposition des mesures finies***. On se propose de montrer le résultat suivant : Pour toute mesure finie μ sur les boréliens de $\mathbb{R}$, il existe une décomposition $\mu = \mu_a + \mu_s + \mu_\delta$, avec $\mu_a \ll \lambda$, μ_s une mesure sans atome et μ_s, μ_δ et λ étrangères entre elles.

1. Soient X un espace topologique séparé σ-compact et $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ la tribu engendrée par les ouverts de X. Soit μ une mesure borélienne positive sur X, c'est-à-dire telle que $\mu(K) < +\infty$ pour tout compact K.
   (a) Montrer que l'ensemble $D = \{a \in X \;:\; \mu(\{a\}) > 0\}$ est dénombrable.
   (b) On pose $\mu_\delta(A) = \mu(A \cap D)$ pour tout $A \in \mathcal{B}$. Montrer que μ_δ est une mesure sur X, et que de plus
   $$\mu_\delta = \sum_{a \in D} \mu(\{a\})\delta_a\,.$$
   (c) En déduire qu'il existe une mesure borélienne sans atome μ_s sur X telle que $\mu = \mu_s + \mu_\delta$.
2. Conclure.

Exercice 6 – ***Mesure complexe et partition finie***. Soit μ une mesure complexe sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$. Montrer que

$$\forall E \in \mathcal{A}, \quad |\mu|(E) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |\mu(E_k)| \;:\; (E_1, \ldots, E_n) \text{ partition finie de } E\right\}\,.$$

Exercice 7 – ***Espace des mesures signées***. 1. Montrer que $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ l'espace des mesures boréliennes signées sur $\mathbb{R}$ est un espace de Banach pour la norme $\|.\| : \mu \mapsto |\mu|(\mathbb{R})$.

2. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré fini. Montrer que pour tout $f \in \mathbb{L}^1(X, \mathcal{A}, \nu)$, on a $\|f\|_1 = \|f \cdot \nu\|$ où $\|.\| : \mu \mapsto |\mu|(X)$.

Exercice 8 – ***Variation totale et mesures de probabilités***. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, et soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux mesures de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

1. Montrer que
$$\|\mathbb{P} - \mathbb{Q}\| = 2 \max_{A \in \mathcal{A}} |\mathbb{P}(A) - \mathbb{Q}(A)| = 2 \max_{A \in \mathcal{A}} \mathbb{P}(A) - \mathbb{Q}(A) \,.$$
2. Si de plus Ω est un ensemble dénombrable et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, montrer que :
$$\|\mathbb{P} - \mathbb{Q}\| = \sum_{\omega \in \Omega} |\mathbb{P}(\omega) - \mathbb{Q}(\omega)| \,.$$

Exercice 9 – ***Transformée de Fourier d'une mesure***. Soit μ une mesure borélienne complexe sur $[0, 2\pi[$. On définit la suite de ses coefficients de Fourier par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \hat{\mu}(n) = \int_0^{2\pi} e^{-int} \, \mathrm{d}\mu(t) \,.$$

On suppose que $\hat{\mu}(n) \longrightarrow_{n \to +\infty} 0$ et on se propose de montrer que $\hat{\mu}(n) \longrightarrow_{n \to -\infty} 0$.

1. Soit f mesurable et $|\mu|$-intégrable. Montrer que $\widehat{\mu_f}(n) \longrightarrow_{n \to +\infty} 0$, où μ_f désigne la mesure $f \cdot \mu$.
Indication : On commencera par établir le résultat pour f un polynôme trigonométrique.
2. Montrer que $\widehat{|\mu|}(n) \longrightarrow_{|n| \to +\infty} 0$ et conclure.

Exercice 10 – ***Convolution de mesures***. Soient μ et ν deux mesures boréliennes σ-finies sur $\mathbb{R}^n$ et $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application somme. On pose $\mu * \nu(A) = \mu \otimes \nu(s^{-1}(A))$ pour A borélien.

1. Montrer que $\mu * \nu$ est une mesure borélienne, qui n'est pas forcément finie sur les compacts, même si μ et ν le sont. On appelle $\mu * \nu$ la *convolée* de μ et ν.
2. Montrer que
$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \quad \mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(A - t) \, \nu(\mathrm{d}t) = \int_{\mathbb{R}^n} \nu(A - t) \, \mu(\mathrm{d}t) \,.$$
3. On suppose que μ et ν sont finies. Soit g une fonction borélienne bornée, montrer que :
$$\int_{\mathbb{R}^n} g(t) \, \mu * \nu(\mathrm{d}t) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} g \circ s(x, y) \, \mu \otimes \nu(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \,.$$
4. Montrer que l'opérateur de convolution est commutatif et associatif sur l'ensemble des mesures boréliennes de probabilité. Montrer que la mesure de Dirac en 0 est élément neutre.
Remarque : L'idée des approximations de l'unité est justement de s'approcher de la mesure de Dirac en 0.
5. La *mesure de probabilité de Poisson* π_λ de paramètre $\lambda > 0$ est définie par
$$\pi_\lambda = \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \delta_n \,.$$
Vérifier que π_λ définie bien une mesure puis calculer $\pi_\lambda * \pi_\mu$ pour $\lambda, \mu > 0$.

Exercice à chercher pour la prochaine fois :)

Exercice 11 – ***L'intégrale de Gauss is back***. 1. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Calculer $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle x, Ax \rangle} \, \mathrm{d}x$.