Devoir Maison 1

À rendre le **jeudi 13 Octobre 2022** en début de TD.

Les devoirs maison sont en temps (quasi) illimité, ils constituent ainsi une formidable occasion de travailler la rédaction. Celle-ci devra ne pas manquer d'arguments tout en restant concise (vous êtes encouragés à utiliser, dès que cela est possible, tout résultat démontré en cours ou en TD). ***Une part importante de la notation portera sur le soin et la rédaction de la copie.***

Sauf mention contraire, toutes les mesures considérées dans ces exercices sont σ-finies.

Exercice 1 – ***Ensembles de mesure nulle***. Soient (X, d) un espace métrique, et μ une mesure positive définie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{O}(X))$.

1. **On suppose dans cette question que μ est finie** et on souhaite montrer le résultat suivant : *Il est possible d'encadrer avec une précision arbitraire la mesure de tout borélien par celles d'un ouvert plus grand et d'un fermé plus petit.*
   On considère l'ensemble $\mathcal{T}$ constitué des ensembles mesurables $A \in \mathcal{B}(X)$ tels que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert O et un fermé F de X tels que
   $$F \subset A \subset O \qquad \text{et} \qquad \mu(O \setminus F) < \varepsilon\,.$$
   (a) Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu.
   (b) Montrer que $\mathcal{T}$ contient les ouverts de X.
   Indication : Pour $A \in \mathcal{B}(X)$, on pourra considérer les ensembles $F_\delta = \{x \in X \,:\, d(x, A^c) \geq \delta\}$ pour $\delta > 0$.
   (c) En déduire que pour tout ensemble mesurable $A \in \mathcal{B}(X)$, on a
   $$\forall A \in \mathcal{B}(X), \qquad \mu(A) = \sup\Big\{\mu(F) \,:\, F \text{ fermé},\ F \subset A\Big\} = \inf\Big\{\mu(O) \,:\, O \text{ ouvert},\ A \subset O\Big\}.$$

Dans la suite de l'exercice, on se propose de démontrer la caractérisation des boréliens de mesure nulle de $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ suivante : *Un borélien est de mesure nulle si, et seulement si, on peut le recouvrir par une union dénombrable de pavés ouverts dont la somme des mesures est arbitrairement petite.*

Rappel : On définit λ_d comme étant l'unique mesure vérifiant, pour tout $(a_i)_{1\leq i\leq d}, (b_i)_{1\leq i\leq d} \in \mathbb{R}^d$ avec $a_i < b_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$,
$$\lambda_d\Big(\prod_{i=1}^{d}]a_i, b_i[\Big) = \prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i)\,,$$
et on suppose qu'il s'agit de la seule propriété connue concernant λ_d (hormis les propriétés générales sur les mesures).

2. Démontrer le sens indirect de la caractérisation.
3. *La rédaction de cette question requiert beaucoup de précaution. Merci d'y réfléchir préalablement au brouillon.*
   Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\underline{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$, on définit le pavé dyadique
   $$D_{n,\,\underline{k}} = \prod_{i=1}^{d}\Big[\frac{k_i}{2^n}, \frac{k_i+1}{2^n}\Big[,$$
   puis on considère l'ensemble de ces pavés $\mathcal{D} = \Big\{D_{n,\,\underline{k}} \,:\, n \in \mathbb{N}^*,\ \underline{k} \in \mathbb{Z}^d\Big\}$ (voir la Figure 1 pour comprendre la structure de $\mathcal{D}$).
   (a) Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On considère le sous-ensemble $\mathcal{D}_O$ constitué des pavés de $\mathcal{D}$ qui sont inclus dans O et qui sont maximaux (au sens de l'inclusion) parmi les pavés vérifiant cette propriété. Autrement dit, $D \in \mathcal{D}_O$ si $D \subset O$ et s'il n'existe pas de pavé $D' \subset O$ tel que $D \subsetneq D'$.
   Montrer que O peut s'écrire comme la réunion disjointe de pavés dyadiques suivante :
   $$O = \bigsqcup_{D \in \mathcal{D}_O} D\,.$$

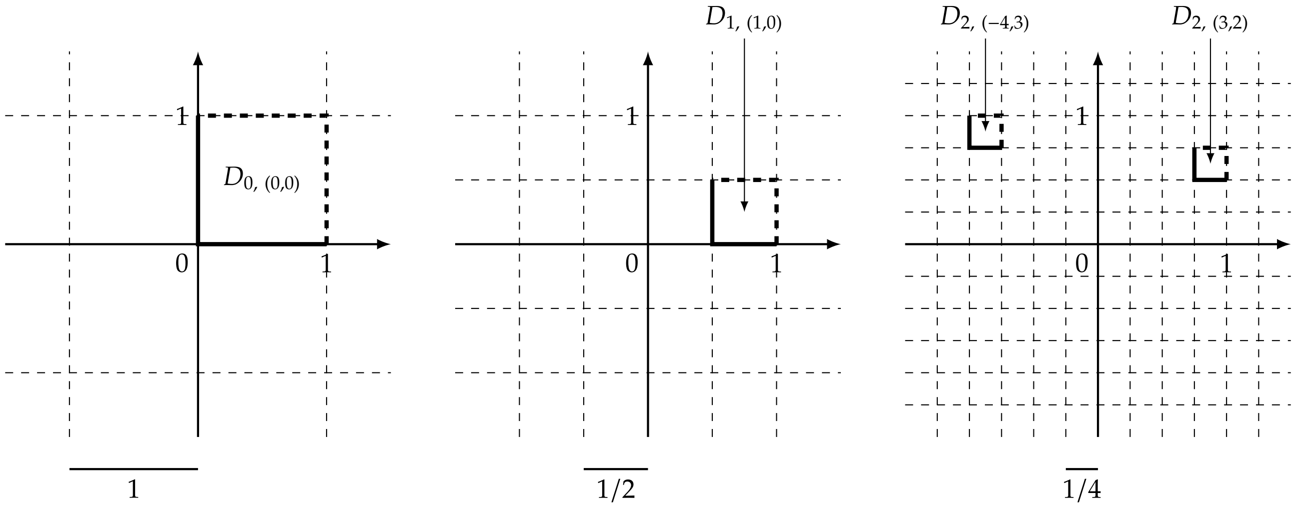

Figure 1 – Les grilles de $\mathbb{R}^2$ définissant les familles de pavés $(D_{0,\,\underline{k}})_{\underline{k}\in\mathbb{R}^2}$, $(D_{1,\,\underline{k}})_{\underline{k}\in\mathbb{R}^2}$ et $(D_{2,\,\underline{k}})_{\underline{k}\in\mathbb{R}^2}$.

(b) En déduire que pour tout ouvert O de $\mathbb{R}^d$ de mesure finie, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement dénombrable de O par des pavés **ouverts** dont la somme des mesures est inférieure à $\lambda_d(O) + \varepsilon$.

(c) En utilisant la question 1., en déduire le sens direct de la caractérisation.

4. *Application*. Montrer que les axes $O_y = \Big\{(0, y) \,:\, y \in \mathbb{R}\Big\}$ et $O_x = \Big\{(x, 0) \,:\, x \in \mathbb{R}\Big\}$ sont de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 🏠 **–** ***Mesures invariantes***. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré avec μ une mesure positive, et soit $f : X \to X$ une application mesurable. On dit que la mesure μ est *f-invariante* si pour tout ensemble mesurable $A \in \mathcal{T}$,

$$\mu(A) = \mu\Big(f^{-1}(A)\Big). \tag{1}$$

On se propose dans cet exercice d'étudier quelques propriétés des mesures invariantes.

0. Soit $g : X \to [-\infty, +\infty]$ une fonction mesurable. Montrer qu'il existe une suite $(s_n)_{n\geq 1}$ de fonctions simples convergeant simplement vers g et telles que $|s_n| \leq |g|$ pour tout $n \geq 1$.
1. Montrer que la mesure μ est f-invariante si, et seulement si,

$$\int_X \varphi(x)\,\mu(\mathrm{d}x) = \int_X \varphi \circ f(x)\,\mu(\mathrm{d}x)\,, \tag{2}$$

pour toute fonction $\varphi : X \to \mathbb{R}$ μ-intégrable.

2. Montrer que si μ est f-invariante, alors pour tout $n \geq 2$, μ est f^n-invariante.
Les réciproques suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
   - Si μ est f^n-invariante pour tout $n \geq 2$, alors μ est f-invariante.
   - S'il existe $n \geq 2$ tel que μ est f^n-invariante, alors μ est f-invariante.
3. **On suppose dans cette question que μ est une mesure finie.** Soit $E \in \mathcal{T}$. On se propose de montrer ici le résultat suivant : *Si $\mu(E) > 0$, alors pour μ-presque tout point x de E, il existe un nombre infini d'entiers $n \geq 0$ pour lesquels $f^n(x)$ appartient aussi à E.*

   (a) Notons E_0 l'ensemble des points $x \in E$ qui ne retournent jamais dans E, *i.e.* tels que $f^n(x) \notin E$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que E_0 est de mesure nulle.

   (b) Notons F l'ensemble des points $x \in E$ qui retournent dans E un nombre fini de fois. Montrer que F est de mesure nulle.

   (c) Conclure.