Ensembles & Tribus

Exercice 1 – ***Ensembles dénombrables***. Soit X un ensemble infini dénombrable.

1. Montrer que l'ensemble des parties finies de X est dénombrable.
2. En déduire que l'ensemble des parties infinies de X n'est pas dénombrable.

Exercice 2 – ***Théorème de Cantor-Bernstein***. Soient E et F deux ensembles. Le but de l'exercice est de montrer le résultat suivant : *S'il existe deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to E$ injectives, alors il existe une bijection entre E et F.*

1. Soit $X = \{A \subset E \,:\, g(F \setminus f(A)) \subset E \setminus A\}$. Montrer que X n'est pas vide.
2. Montrer que X a un plus grand élément pour l'inclusion que l'on note M.
3. Montrer que $g(F \setminus f(M)) = E \setminus M$. Conclure.

Exercice 3 – ***Limites inférieure et supérieure d'ensembles***. Soit E un ensemble et soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-ensembles de E.

1. Que représentent les ensembles suivants
$$\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k \quad \text{et} \quad \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k\,.$$
Le premier ensemble est noté $\liminf_{n\to+\infty} A_n$ et le second $\limsup_{n\to+\infty} A_n$.
Rappelons que l'on définit de même les limites supérieure et inférieure d'une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\inf_{k\geq n} a_k = \lim_{n\to+\infty}\inf_{k\geq n} a_k \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geq n} a_k = \lim_{n\to+\infty}\sup_{k\geq n} a_k\,.$$
Relier les fonctions indicatrices $\mathbb{1}_{\liminf_{n\to+\infty} A_n}$ et $\mathbb{1}_{\limsup_{n\to+\infty} A_n}$ aux fonctions $(\mathbb{1}_{A_n})_{n\geq 1}$.
2. Montrer que les propriétés suivantes sont vérifiées :
   (a) $(\limsup_{n\to+\infty} A_n)^c = \liminf_{n\to+\infty} A_n^c$ et $\liminf_{n\to+\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$,
   (b) $\limsup_{n\to+\infty} A_n = \{\sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{A_n} = +\infty\}$ et $\liminf_{n\to+\infty} A_n = \{\sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{A_n^c} < +\infty\}$,
   (c) $\limsup_{n\to+\infty}(A_n \cup B_n) = \limsup_{n\to+\infty} A_n \cup \limsup_{n\to+\infty} B_n$ et $\limsup_{n\to+\infty}(A_n \cap B_n) \subset \limsup_{n\to+\infty} A_n \cap \limsup_{n\to+\infty} B_n$.
3. On dit que $A \subset E$ est la limite de la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ si $\limsup_{n\to+\infty} A_n = \liminf_{n\to+\infty} A_n = A$. Si $\limsup_{n\to+\infty} A_n \neq \liminf_{n\to+\infty} A_n$, on dit que la limite $\lim_{n\to+\infty} A_n$ n'existe pas. Montrer que
   (a) si $(A_n)_{n\geq 1}$ est croissante, c'est-à-dire $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n$,
   (b) si $(A_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, c'est-à-dire $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} A_n$.
4. Calculer $\liminf_{n\to+\infty} A_n$ et $\limsup_{n\to+\infty} A_n$ dans les cas suivants :
   (a) $A_{2n} = F$ et $A_{2n+1} = G$, où $F, G \subset E$ sont fixés,
   (b) $A_n =]-\infty, a_n]$, où $a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$ et $a_{2n+1} = -1 - \frac{1}{2n+1}$,
   (c) $A_{2n} =]0, 3 + \frac{1}{2n}[$ et $A_{2n+1} =]-1-\frac{1}{3n}, 2]$,
   (d) $A_n = p_n\mathbb{N}$, où $(p_n)_{n\geq 1}$ est la suite des nombres premiers et $p_n\mathbb{N}$ est l'ensemble des multiples de p_n.

Exercice 4 – ***Exemples de tribus***. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable.

1. Les ensembles suivants sont des algèbres de parties de X. Dire lesquels sont des σ-algèbres.
   (a) L'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X.
   (b) L'ensemble $\mathcal{A}_f$ formé par les parties $A \subset X$ telles que soit A, soit A^c est fini.
   (c) L'ensemble $\mathcal{A}_d$ formé par les parties $A \subset X$ telles que A ou A^c est fini ou dénombrable.
   (d) L'ensemble $\mathcal{A}$ formé par les parties $A \subset X$ telles que $A \subset B$ ou $X \setminus A \subset B$, pour un ensemble $B \subset X$ fixé.
   (e) L'ensemble $\mathcal{A}$ formé par les parties $A \subset X$ telles que $B \subset A$ ou $A \cap B = \emptyset$, pour un ensemble $B \subset X$ fixé.
   (f) L'ensemble $\mathcal{A}$ formé par les unions finies d'intervalles de $\mathbb{R}$.
2. Quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des singletons de X ?

3. Supposons que $\mathrm{card}(X) > 2$, quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des paires (c'est-à-dire l'ensemble des ensembles à deux éléments) de X ?

Exercice 5 – ***Un contre-exemple de tribu*.** 1. Soit $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante d'algèbres de parties d'un ensemble X. Montrer que $\mathcal{A} = \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{A}_n$ est une algèbre.

2. Pour tout entier $n \geq 0$, considérons la tribu $\mathcal{T}_n = \sigma(\{0\}, \{1\}, \dots, \{n\})$ sur $\mathbb{N}$. Montrer que la suite de tribus $(\mathcal{T}_n)_{n\geq 0}$ est croissante, mais que la réunion $\mathcal{T} = \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{T}_n$ n'est pas une tribu.

Exercice 6 – ***Difficile de mettre la main sur les boréliens*.** Soient A et B deux ensembles, et soit $(C^i_j)_{(i,j)\in A\times B}$ une famille d'ensembles de X. Montrer que

$$\bigcap_{i\in A} \bigcup_{j\in B} C^i_j = \bigcup_{\varphi : A\to B} \bigcap_{i\in A} C^i_{\varphi(i)} .$$

Remarque : En particulier si $A = B = \mathbb{N}$, alors l'union du membre de droite est une union ***non-dénombrable !***

Exercice 7 – ***Boréliens de $\overline{\mathbb{R}}$*.** On définit sur $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ la distance (où par convention $\arctan(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$) :

$$d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)| .$$

1. Montrer que d est bien une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$.
2. Montrer que la tribu des boréliens est engendrée par $\{[a, +\infty] \,:\, a \in \mathbb{R}\}$.
3. Décrire d'autres familles engendrant les boréliens de $\overline{\mathbb{R}}$.
4. Décrire des familles engendrant les boréliens de $\mathbb{R}_+$ et $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Exercice 8 – ***Tribu image réciproque & tribu image*.** Soient X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.

1. *(Tribu image réciproque)* Si $\mathcal{B}$ est une tribu sur Y, montrer que l'ensemble $\mathcal{A} = \{f^{-1}(B) \,:\, B \in \mathcal{B}\}$ est une tribu sur X, notée $f^{-1}(\mathcal{B})$.
2. *(Tribu image)* Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur X, montrer que l'ensemble $\mathcal{B} = \{B \in Y \,:\, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur Y.
3. *(Lemme de transport)* Si $\mathcal{B}$ est une tribu sur Y engendrée par $\mathcal{M}$, montrer que $f^{-1}(\mathcal{B})$ est la tribu engendrée par $f^{-1}(\mathcal{M})$.

Exercice 9 – ***Tribu trace*.** Soient X un ensemble, et E une partie de X. Pour $\mathcal{F}$ une famille de parties de X, on note

$$\mathcal{F}_E = \{A \cap E \,:\, A \in \mathcal{F}\} .$$

1. Montrer que si $\mathcal{T}$ est une tribu sur X, alors $\mathcal{T}_E$ est une tribu sur E.
2. Montrer que pour tout famille $\mathcal{C}$ de X on a $(\sigma(\mathcal{C}))_E = \sigma(\mathcal{C}_E)$.
3. On suppose que X est un espace topologique. Montrer que les boréliens de E (munie de la topologie induite) sont les intersections avec E des boréliens de X.
4. En déduire qu'une application à valeurs dans $\mathbb{R}$ est mesurable si, et seulement si, elle est mesurable en tant qu'application à valeurs dans $\mathbb{C}$.

À chercher pour la prochaine fois :)

Exercice 10 🏠 – ***Mesures sur $\mathbb{Z}$*.** 1. Décrire les mesures sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$.

2. Quelles sont les mesures finies sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ invariantes par translation ?