Applications mesurables & Intégration

Exercice 1 – ***Exemples de fonctions mesurables*.** 1. Soient (X, d) un espace métrique et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue. f est-elle mesurable ?

2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. f' est-elle mesurable ?
3. L'inverse d'une bijection mesurable est-elle toujours mesurable ?

Exercice 2 – ***Fonctions mesurables bornées*.** Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.

1. Montrer que si $\mu(X) > 0$, alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) > 0$ et f soit bornée sur A.
2. Montrer que si $\mu(\{f \neq 0\}) > 0$, alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) > 0$ et $|f|$ soit minorée sur A par une constante strictement positive.

Exercice 3 – ***Linéarité de l'intégrale*.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ deux fonctions μ-intégrables, et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Montrer que $\alpha f + \beta g$ est μ-intégrable et

$$\int_X (\alpha f + \beta g)\, \mathrm{d}\mu = \alpha \int_X f\, \mathrm{d}\mu + \beta \int_X g\, \mathrm{d}\mu\,.$$

Exercice 4 – ***Fatou et limsup*.** Trouver des suites de fonctions positives $(f_n)_{n\geq 1}$ et $(g_n)_{n\geq 1}$ définies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où λ désigne la mesure de Lebesgue, telles que

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, \lambda(\mathrm{d}x) < \int_{\mathbb{R}} \limsup_{n\to+\infty} f_n(x)\, \lambda(\mathrm{d}x) \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\, \lambda(\mathrm{d}x) > \int_{\mathbb{R}} \limsup_{n\to+\infty} g_n(x)\, \nu(\mathrm{d}x)\,.$$

Exercice 5 – ***Théorème de Beppo Levi ?*.** Pour $n \geq 1$, on pose $f_n = n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$ et $g_n = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}$. Montrer que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ λ-p.p., $g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ λ-p.p. et que $\int_{\mathbb{R}} f_n\, \mathrm{d}\lambda = \int_R g_n\, \mathrm{d}\lambda = 1$. Peut-on en déduire que $1 = 0$?

Exercice 6 – ***Quand deux mathématiciens s'affrontent*.** Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, convergeant vers f λ_d-p.p. et telle que $\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\, \mathrm{d}\lambda_d(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer de deux manières différentes que $f = 0$ λ_d-p.p..

Exercice 7 – ***Fonction nulle presque partout*.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Supposons que $\int_A f\, \mathrm{d}\lambda = 0$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que f est nulle presque partout.
Le résultat est-il encore vrai si f n'est plus positive ?

Exercice 8 – ***Sommation par tranches*.** Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive. Montrer que

$$\int_X f\, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^n} \mu\Big(\Big\{f > \frac{k}{2^n}\Big\}\Big)\,.$$

Exercice 9 – ***Théorème de convergence dominée ?*.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec μ une mesure non-nulle finie. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions bornées à valeurs complexes mesurables convergeant uniformément vers une fonction $f : X \to \mathbb{C}$.

1. Montrer que les $(f_n)_{n\geq 0}$ et f sont μ-intégrables et que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f|\, \mathrm{d}\mu = 0\,.$$

2. Montrer que cette propriété n'est plus vraie si $\mu(X) = +\infty$.

Exercice 10 – ***Lemme des moyennes*.** Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré avec μ une mesure finie non nulle, et soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction μ-intégrable pour laquelle on suppose qu'il existe un fermé F de $\mathbb{C}$ tel que pour tout $A \in \mathcal{T}$ avec $\mu(A) > 0$ on a

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f(x)\, \mu(\mathrm{d}x) \in F\,.$$

1. Montrer que $f(x) \in F$ pour μ-presque tout $x \in X$.
   Indication : On pourra montrer que pour toute boule ouverte $B(z,r) \subset F^c$, on a $\mu(f^{-1}(B(z,r))) = 0$.
   Rappel topologique : Tout ouvert de $\mathbb{C}$ s'écrit comme union dénombrable de boules ouvertes.
2. Montrer que l'on peut remplacer l'hypothèse « μ finie » par « μ σ-finie ».

À chercher pour la prochaine fois :)

Exercice 11 – ***Une limite d'intégrales***. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $f : X \to [0, +\infty]$ telle que $\int_X f \, d\mu = 1$, et $\alpha > 0$. Déterminer la limite

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X n \log\left(1 + \frac{f^\alpha}{n^\alpha}\right) d\mu \,.$$