

Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice 1 – Pour s'échauffer. Soient $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$ deux suites de réels avec $a_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ x &\longmapsto \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{|x - b_n|} \end{aligned}$$

est finie $\lambda(x)$ -presque partout si $\sum_{n \geq 1} \sqrt{a_n} < +\infty$.

Exercice 2 – Étude de fonction. Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue-intégrable, et soit

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ t &\longmapsto \int_0^1 \sqrt{\varphi(x)^2 + t} \, dx. \end{aligned}$$

1. Montrer que F est bien définie, continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que F soit dérivable en 0.

Exercice 3 – Un calcul de primitive. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, μ une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ne chargeant pas t_0 (i.e. $\mu(\{t_0\}) = 0$) et $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ telle que la fonction $(x \mapsto xf(x)) \in \mathcal{L}^1(\mu)$. On pose

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_{\mathbb{R}} (t - x)^+ f(x) \, \mu(dx). \end{aligned}$$

Montrer que la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est dérivable en t_0 , de dérivée

$$F'(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} f(x) \, \mu(dx).$$

Remarque : Si μ est une mesure sans-atome (i.e. ne chargeant aucun point de $\mathbb{R}$), on a montré que F est une primitive de $t \mapsto \int_{-\infty}^t f(x) \, \mu(dx)$.

Exercice 4 – Transformée de Laplace. Soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, et

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \\ x &\longmapsto \int_{\mathbb{R}} e^{xt} \, d\mu(t). \end{aligned}$$

1. Montrer que $D = \{x \in \mathbb{R} : L(x) < +\infty\}$ est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que L est convexe sur D .
3. Montrer que L est de classe C^∞ sur l'intérieur de D .
4. (Bonus) Trouver une mesure de probabilité μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $D_\mu = \{0\}$.

Exercice 5 – Initiation à la transformation de Fourier. On se place sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue. On se donne $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et on définit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f) : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \xi &\longmapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x \xi} f(x) \, dx. \end{aligned}$$

1. Montrer que $\mathcal{F}(f)$ est bien définie, continue sur $\mathbb{R}$ et bornée par $\|f\|_1$.
2. *Un petit lemme.* Soit $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer que l'on peut trouver une suite $(y_n)_{n \geq 0}$ (resp. $(z_n)_{n \geq 0}$) de réels négatifs décroissants vers $-\infty$ (resp. réels positifs croissants vers $+\infty$) telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(y_n) = 0$ (resp. $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(z_n) = 0$).
3. On suppose dans cette question que $f \in C^1(\mathbb{R})$ et que $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer qu'alors

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(f')(\xi) = 2i\pi \xi \mathcal{F}(f)(\xi).$$

4. Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ à support compact. En considérant $\mathcal{F}(\varphi - \varphi'')$, montrer qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad |\mathcal{F}(\varphi)(\xi)| \leq \frac{C}{1 + 4\pi^2 |\xi|^2}.$$

5. *Lemme de Riemann-Lebesgue.* Dédurre de ce qui précède que $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) = 0$.

Remarque : Les résultats généraux et plus profonds sur la transformation de Fourier ainsi que sa définition sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ sont au programme du cours *Intégration et Probabilités* du second semestre.

Exercice 6 – Transformée de Fourier d'une mesure. Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu(t) \end{aligned}$$

est bien définie.

On suppose dorénavant que $\frac{2f(0)-f(h)-f(-h)}{h^2}$ a une limite finie lorsque h tend vers 0.

2. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} t^2 d\mu(t)$ est finie.

3. Montrer que f est de classe C^2 .

Supposons à présent que $\frac{f(0)-f(h)}{h}$ a une limite lorsque h tend vers 0.

4. Est-il encore vrai que $\int_{\mathbb{R}} t d\mu(t)$ est finie ?

5. Est-il encore vrai que f est de classe C^1 ?

Exercice 7 – Convolution. 1. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \lambda)$ et φ une fonction dérivable, bornée et à dérivée bornée sur $\mathbb{R}$. On définit la *convolution* de f par φ , notée $f * \varphi$, la fonction

$$\begin{aligned} f * \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(y-x) f(x) \lambda(dx). \end{aligned}$$

Montrer que $f * \varphi$ est bien définie, bornée et dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner l'expression de sa dérivée.

2. Soit f une fonction de $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Pour $h > 0$, on définit

$$\begin{aligned} f_h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt. \end{aligned}$$

Montrer que f_h est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 – Intégrale de Gauss. Calculer l'intégrale de Gauss $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Indication : Introduire les fonctions $f : x \mapsto (\int_0^x e^{-t^2} dt)^2$ et $g : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et exprimer $f + g$.

Exercice 9 – La formule de Gauss. 1. Montrer que l'intégrale $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$ est finie pour tout $s > 0$.

2. Montrer que la fonction $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ est de classe C^∞ et donner une expression de ses dérivées.

3. Montrer que pour tout $s > 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{s-1} dt = \Gamma(s).$$

4. En déduire la formule de Gauss

$$\forall s > 0, \quad \Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^s}{s(s+1) \cdots (s+n)}.$$

🏠 - DM à rendre au prochain TD ☺