

Espaces $\mathbb{L}^p$

Exercice 1 – Pour s'échauffer. 1. La convergence dans $\mathbb{L}^p(\mu)$ de fonctions de $\mathcal{L}^p(\mu)$ entraîne-t-elle la convergence μ -p.p. ?
 2. La convergence μ -p.p. de fonctions de $\mathcal{L}^p(\mu)$ entraîne-t-elle la convergence dans $\mathbb{L}^p(\mu)$?
 3. Soient $p \neq q \in [1, +\infty[$. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(X, \mathcal{T}, \mu) \cap \mathbb{L}^q(X, \mathcal{T}, \mu)$. On suppose que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ dans $\mathbb{L}^p$ et que $(f_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^q$. Montrer que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ dans $\mathbb{L}^q$.

Exercice 2 – Emboîtements des espaces de Lebesgue. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive.

1. Soient $1 \leq p_1 \leq p \leq p_2 \leq +\infty$. Montrer que

$$\mathbb{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) \subseteq \mathbb{L}^{p_1}(X, \mathcal{A}, \mu) + \mathbb{L}^{p_2}(X, \mathcal{A}, \mu).$$

2. Soient $1 \leq p < q \leq +\infty$. Montrer que pour tout $p \leq r \leq q$, on a

$$\mathbb{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) \cap \mathbb{L}^q(X, \mathcal{A}, \mu) \subseteq \mathbb{L}^r(X, \mathcal{A}, \mu).$$

3. Donner un exemple d'espace mesuré pour lequel $(\mathbb{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu))_{p \in [1, +\infty]}$ est croissante pour l'inclusion.

4. Donner un exemple d'espace mesuré pour lequel $(\mathbb{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu))_{p \in [1, +\infty]}$ est décroissante pour l'inclusion.

Exercice 3 – Super-Hölder. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $p, q \in [1, +\infty]$ et r défini par $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Montrer que pour toutes fonctions $f \in \mathbb{L}^p$ et $g \in \mathbb{L}^q$, on a $fg \in \mathbb{L}^r(X, \mu)$ et

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Exercice 4 – Lemme de Scheffé. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de $\mathbb{L}^p$ qui converge μ -p.p. vers une fonction $f \in \mathbb{L}^p$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_p = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p.$$

Exercice 5 – Lemme de Hadamard. On se place sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soient $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable, et

$$F : \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^x f(t) dt. \end{array}$$

1. Montrer que F est continue sur $[-1, 1]$.

2. On suppose dans cette question que f est continue. Montrer que F est de classe C^1 et déterminer sa dérivée.

3. *Lemme de Hadamard.* Soit $\varphi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Dédurre de la question précédente qu'il existe une fonction continue $\theta : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \varphi(x) = \varphi(0) + x\theta(x).$$

4. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$. En déduire dans quels cas la fonction $x \mapsto \frac{\varphi(x)}{x}$ est intégrable sur $[-1, 1]$.

5. Montrer que la quantité

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \int_{\varepsilon}^1 \frac{\varphi(t)}{t} dt$$

converge lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Exercice 6 – Lemme de Riemann-Lebesgue. Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Montrer que :

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda t} dt = 0.$$

 **La prochaine fois : Partiel** 