Fubini & Convolution

Exercice 1 – ***Un calcul pour s'échauffer***. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases} \end{array}$$

Calculer

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\,.$$

Que peut-on en déduire ?

Exercice 2 – ***Mesures de l'épigraphe et du graphe d'une fonction***. Soit f une fonction mesurable positive définie sur $\mathbb{R}$. Dire si les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont mesurables, et si oui calculer leur mesure :

1. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq y \leq f(x)\}$ l'*épigraphe de* f,
2. $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = f(x)\}$ le *graphe* de f.

Exercice 3 – ***Une égalité pratique***. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini. Soient $f : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable, et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante de classe C^1 telle que $g(0) = 0$. Montrer que

$$\int_X g \circ f \,\mathrm{d}\mu = \int_0^{+\infty} g'(t)\mu(\{f \geq t\})\,\mathrm{d}t\,.$$

Exercice 4 – ***Contre-exemple au théorème de Fubini-Tonelli ?***. Donner un exemple de fonction φ positive, continue sur $]-1,1[^2$, d'intégrale finie, mais telle que $\int_{-1}^1 \varphi(x,y)\,\mathrm{d}y$ soit infinie pour certains $x \in]-1,1[$.

Exercice 5 – ***Intégration par parties***. Soient $F, G : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions croissantes et càdlàg (continue à droite et admettant une limite à gauche en tout point). En notant $\Delta F(x) = F(x) - F(x^-)$, montrer que

$$F(1)G(1) - F(0)G(0) = \int_{]0,1]} F(x^-)\,\mathrm{d}G(x) + \int_{]0,1]} G(x^-)\,\mathrm{d}F(x) + \sum_{x \in]0,1]} \Delta F(x) \Delta G(x)\,.$$

Exercice 6 – ***Inégalité de Hardy-Littlewood-Pólya***. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction décroissante, continue à droite et telle que $f(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

1. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive, et soit $G : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} fg\,\mathrm{d}\lambda = \int_0^{+\infty} G\,\mathrm{d}(-f)\,.$$

Indication : On pourra commencer par traiter le cas où $g = \mathbb{1}_A$, avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

2. Soient $p, q > 1$ deux exposants conjugués et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $pa + 1 > 0$ et $qb + 1 > 0$. Démontrer l'*inégalité de Hardy-Littlewood-Pólya* :

$$\int_0^{+\infty} x^{a+b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{(pa+1)^{\frac{1}{p}}(qb+1)^{\frac{1}{q}}}{a+b+1} \left(\int_0^{+\infty} x^{pa} f(x)\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} x^{qb} f(x)\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Exercice 7 – ***Volumes des boules unités***. On note C_d le volume d'une boule euclidienne de rayon 1 dans $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue.

1. Montrer la relation de récurrence suivante :

$$\forall d \geq 1, \quad C_{d+1} = C_d \int_0^1 (1-u)^{\frac{d}{2}} u^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u\,.$$

On appelle *fonction eulérienne de première espèce* la fonction

$$B: \begin{array}{ccc}]0,+\infty[^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (p,q) & \longmapsto & \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t\,. \end{array}$$

2. Montrer que B est bien définie et est C^1 sur $]0,+\infty[^2$.
3. Montrer que

$$\forall (p,q) \in]0,+\infty[^2, \quad B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi)^{2p-1}\cos(\varphi)^{2q-1}\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{+\infty} \frac{2u^{2p-1}}{(1+u^2)^{p+q}}\,\mathrm{d}u\,.$$

En déduire la valeur de $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

4. Montrer la *formule des compléments* :

$$\forall (p,q) \in]0,+\infty[^2, \quad B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\,.$$

En déduire $\Gamma(\frac{1}{2})$.

5. Calculer la valeur des constantes $(C_d)_{d\geq 1}$, que l'on exprimera en fonction de Γ.

Exercice 8 – ***Convolution & Indicatrices***. 1. Soient A et B deux parties mesurables de $\mathbb{R}^d$, de mesure finie non nulle. Montrer que la convolée de leurs fonctions caractéristiques est une fonction continue non nulle. En déduire que $A+B$ contient une boule non triviale.

2. On définit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x-y \notin \mathbb{Q}\}$. Montrer que E ne contient pas d'ensemble $A\times B$ où A et B sont deux ensembles mesurables tels que $\lambda(A), \lambda(B) > 0$.
<u>Indication :</u> On pourra commencer par montrer que $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x+y)\mathbb{1}_B(y)\,dy$ est continue et telle que $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx > 0$.
3. (a) Soient $f, g : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}_+$ deux fonctions boréliennes positives. Montrer que $f*g$ est semi-continue inférieurement, c'est-à-dire que les ensembles $\{f*g \leq M\}$ pour $M \in \mathbb{R}$ sont des fermés.
   (b) En déduire le *théorème de Steinhaus* : si A est un borélien de $\mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue positive, alors $A - A = \{x - y \,:\, x, y \in A\}$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$.

Exercice 9 – ***Convolution & Dérivée***. Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

1. Soient $\varphi \in C_c^n(\mathbb{R}^d)$ et $f \in \mathbb{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ (f est intégrable sur tout compact de $\mathbb{R}^d$). Montrer que $\varphi * f \in C^n(\mathbb{R}^d)$ et que l'on a pour tout multiindice $\underline{\alpha}$ d'ordre au plus n :

$$\partial^{\underline{\alpha}}(\varphi * f) = (\partial^{\underline{\alpha}}\varphi) * f\,.$$

2. Soient $\varphi \in C_b^n(\mathbb{R}^d)$ (φ et ses dérivées d'ordres inférieurs à n sont bornées) et $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Alors on a le même résultat qu'à la question 1.

🏠 - DM à rendre au prochain TD ☺