

Mesures Complexes, Théorème de Radon-Nikodym & Décomposition de Lebesgue

Exercice 1 – Pour s'échauffer. On se place sur $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$. Montrer qu'il n'existe pas de partie $A \in \mathcal{B}([0, 1])$ telle que pour tout intervalle I de $[0, 1]$:

$$\lambda(A \cap I) = \frac{1}{2} \lambda(I).$$

Indication : On pourra supposer que A existe et introduire la mesure $\mu = \mathbb{1}_A \cdot \lambda$.

Exercice 2 – Quantification de l'absolue continuité. 1. Supposons que μ et ν soient deux mesures sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{A})$, la mesure μ étant positive et ν étant une mesure complexe. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\mu \ll \nu$,

(b) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$ avec $\mu(A) < \delta$ on a $|\nu(A)| < \varepsilon$.

2. Que se passe-t-il si ν est maintenant une mesure positive ?

Exercice 3 – Attention aux hypothèses. Soit $\mathbb{R}$ muni des mesures λ de Lebesgue et μ de dénombrement.

- Montrer que μ n'admet pas de décomposition de la forme donnée par le théorème de décomposition de Lebesgue. Quelle hypothèse de ce dernier est mise en défaut ?
- Montrer que λ est absolument continue par rapport à μ , mais qu'il n'existe pas de fonction mesurable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\lambda = f \cdot \mu$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 4 – La mesure du diable. Trouver une mesure étrangère à la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ et sans atome.

Rappel : On dit que deux mesures μ et ν sont étrangères, et on note $\mu \perp \nu$, s'il existe un ensemble mesurable E tel que μ soit portée par E , et ν par E^c , c'est-à-dire si $\mu(E^c) = 0$ et $\nu(E) = 0$.

Exercice 5 – La décomposition de Jordan est minimale. Soit μ une mesure réelle sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$. On rappelle que la décomposition de Jordan de μ est donnée par

$$\mu^+ = \frac{|\mu| + \mu}{2} \quad \text{et} \quad \mu^- = \frac{|\mu| - \mu}{2}.$$

- Montrer qu'il existe $\{A^+, A^-\}$ une partition de X composée d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\mu^\pm$ est portée par $A^\pm$ et

$$\forall E \in \mathcal{A}, \quad \mu^\pm(E) = \pm \mu(E \cap A^\pm).$$

- Montrer que la décomposition de Jordan est minimale au sens que si μ_1 et μ_2 sont deux mesures positives bornées telles que $\mu = \mu_1 - \mu_2$, alors $\mu_1 \geq \mu^+$ et $\mu_2 \geq \mu^-$.

Exercice 6 – Décomposition des mesures finies. On se propose de montrer le résultat suivant : Toute mesure finie μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ se décompose en $\mu = \mu_a + \mu_s + \mu_\delta$, avec $\mu_a \ll \lambda$, μ_s une mesure sans atome et μ_s, μ_δ et λ étrangères entre elles.

- Soient X un espace topologique séparé σ -compact et $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ la tribu engendrée par les ouverts de X . Soit μ une mesure borélienne positive sur X , c'est-à-dire telle que $\mu(K) < +\infty$ pour tout compact K .

(a) Montrer que l'ensemble $D = \{a \in X : \mu(\{a\}) > 0\}$ est dénombrable.

(b) On pose $\mu_\delta(A) = \mu(A \cap D)$ pour tout $A \in \mathcal{B}$. Montrer que μ_δ est une mesure sur X , et que de plus

$$\mu_\delta = \sum_{a \in D} \mu(\{a\}) \delta_a.$$

(c) En déduire qu'il existe une mesure borélienne sans atome μ_s sur X telle que $\mu = \mu_s + \mu_\delta$.

- Conclure.

Exercice 7 – Mesure complexe et partition finie. Soit μ une mesure complexe sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$. Montrer que

$$\forall E \in \mathcal{A}, \quad |\mu|(E) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |\mu(E_k)| : (E_k)_{1 \leq k \leq n} \text{ partition finie de } E \right\}.$$

Exercice 8 – Espace des mesures signées. 1. Montrer que $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ l'espace des mesures boréliennes signées sur $\mathbb{R}$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\| : \mu \mapsto |\mu|(\mathbb{R})$.

2. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré fini. Montrer que pour tout $f \in \mathbb{L}^1(X, \mathcal{A}, \nu)$, on a $\|f\|_1 = \|f \cdot \nu\|$ où $\|\cdot\| : \mu \mapsto |\mu|(X)$.

Exercice 9 – Variation totale et mesures de probabilité. 1. Soit X un ensemble dénombrable, et soient μ et ν deux mesures de probabilités sur $(X, \mathcal{P}(X))$. Montrer que

$$\|\mu - \nu\| = 2 \sup_{A \subset X} |\mu(A) - \nu(A)|. \quad (1)$$

2. Montrer que (1) est encore vraie si μ et ν sont deux mesures complexes sur un ensemble mesurable $(X, \mathcal{A})$.

Exercice 10 – Transformée de Fourier d'une mesure. Si μ est une mesure borélienne complexe, alors¹ il existe une fonction borélienne complexe h , avec $|h| = 1$ telle que $d\mu = h d|\mu|$. On définit alors l'intégrale par rapport à la mesure complexe μ par

$$\int f d\mu = \int fh d|\mu|.$$

Soit μ une mesure borélienne complexe sur $[0, 2\pi[$. On définit la suite de ses coefficients de Fourier par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \hat{\mu}(n) = \int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t).$$

On suppose que $\hat{\mu}(n) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ et on se propose de montrer que $\hat{\mu}(n) \rightarrow_{n \rightarrow -\infty} 0$.

1. Soit f mesurable et $|\mu|$ -intégrable. Montrer que $\widehat{\mu_f}(n) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$, où μ_f désigne la mesure $f \cdot \mu$.

Indication : On commencera par établir le résultat pour f un polynôme trigonométrique.

2. Montrer que $|\widehat{\mu}|(n) \rightarrow_{|n| \rightarrow +\infty} 0$ et conclure.

🏠 Parce que les vacances approchent : Rien à chercher pour la prochaine fois² ☺



1. Cf. prochain cours : Décomposition polaire d'une mesure complexe!

2. Hormis tous les exercices non-traités depuis le début de l'année!