Dualité $\mathbb{L}^p$-$\mathbb{L}^q$

Exercice 0! ❄ – ***Pour s'échauffer***. Soient $X = \{a, b\}$ et μ la mesure définie sur $\mathcal{P}(X)$ par $\mu(\{a\}) = 1$ et $\mu(\{b\}) = \mu(X) = +\infty$. Caractériser $\mathbb{L}^\infty(\mu)$ et le dual topologique de $\mathbb{L}^1(\mu)$. Que peut-on conclure ?

Exercice $\sqrt[8]{256}$ ❄ – ***Convergence faible***. Soient $p \in]1, +\infty[$ et q son exposant conjugué, U un ouvert de $\mathbb{R}$ et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathbb{L}^q(U)$ est séparable.

Soit D une partie dénombrable dense de $\mathbb{L}^q(U)$, et soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée de $\mathbb{L}^p(U)$, c'est-à-dire que la suite $(\|f_n\|_p)_{n\geq 1}$ est bornée.

2. Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ telle que $(\int_U f_{\varphi(n)} h \,\mathrm{d}\lambda)_{n\geq 1}$ converge pour tout $h \in D$.
3. Montrer que $(\int_U f_{\varphi(n)} g \,\mathrm{d}\lambda)_{n\geq 1}$ converge pour tout $g \in \mathbb{L}^q(U)$.
4. En déduire qu'il existe $f \in \mathbb{L}^p(U)$ telle que
$$\forall g \in \mathbb{L}^q(U), \quad \int_U f_{\varphi(n)} g \,\mathrm{d}\lambda \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_U f g \,\mathrm{d}\lambda\,.$$
On dit que la suite $(f_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ *converge faiblement* vers f dans $\mathbb{L}^p(U)$.
5. Le résultat persiste-t-il lorsque $p = 1$?

Exercice $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{3}{\pi}}} r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi$ ❄ – $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ ***n'est pas le dual de*** $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$. Dans cet exercice on souhaite démontrer que $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ n'est pas le dual de $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$.

1. Montrer que les fonctions en escalier (à support compact) sont denses dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. En déduire que $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ est séparable (possède une partie dénombrable dense).
On n'utilisera pas la densité des fonctions continues à support compact, mais seulement la régularité de la mesure de Lebesgue et la structure des ouverts de $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'un espace vectoriel normé ayant un dual séparable est lui même séparable.
On utilisera une forme géométrique du théorème de Hahn-Banach, et si on le connait pas, on admettra le résultat de cette question.
3. Conclure.
Indication : *Pour montrer que* $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$ *n'est pas séparable, on pourra commencer par étbalir le fait suivant.*
Soit E un ensemble. On suppose qu'il existe une famille $(O_i)_{i\in I}$ *telle que :*
   (a) *pour tout* $i \in I$, O_i *est un ouvert non vide de* E,
   (b) $O_i \cap O_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$,
   (c) I *n'est pas dénombrable.*
Alors E n'est pas séparable.

La prochaine fois : Examen

Joyeuses Fetes !

Antoine Barrier - antoine.barrier@ens-lyon.fr
Léo Dort - leo.dort@ens-lyon.fr
Juliana Du - juliana.du@ens-lyon.fr