

Graphes aléatoires hyperboliques

Soutenance de stage de M1

Antoine BARRIER

antoine.barrier@ens-paris-saclay.fr

encadré par Dieter MITSCHÉ (laboratoire J.A. DIEUDONNÉ, Nice)



école —————
normale —————
supérieure —————
paris-saclay —————

Cachan – 11/12 septembre 2018

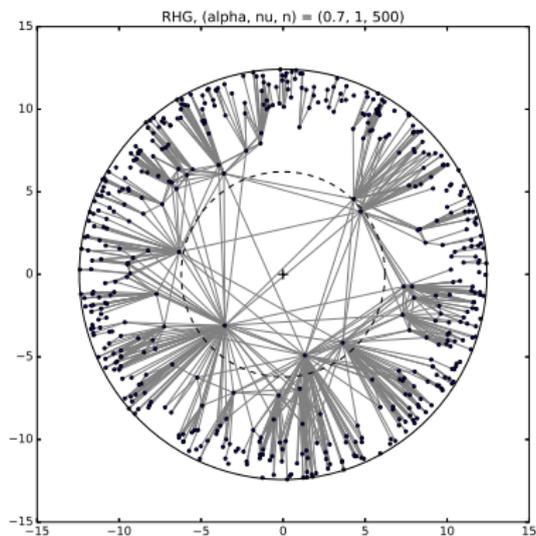


FIGURE – $\mathcal{G}_{0.7, 1}(500)$

- 1 Présentation des graphes aléatoires hyperboliques
- 2 Génération rapide, vérification de quelques propriétés
- 3 Le modèle push & pull

- 1 Présentation des graphes aléatoires hyperboliques
- 2 Génération rapide, vérification de quelques propriétés
- 3 Le modèle push & pull

Présentation des graphes aléatoires hyperboliques

Définition

Définition (graphe aléatoire hyperbolique (RHG))

Soient $\alpha, \nu > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Posant $R = 2 \ln \left(\frac{n}{\nu} \right)$, on dit que le graphe $\mathcal{G}_{\alpha, \nu}(n) = (V, E)$ (avec $|V| = n$) est un graphe aléatoire hyperbolique si :

- les sommets $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ de V sont indépendamment générés dans $\mathbb{B}(O, R)$ avec densité

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\\ (r, \theta) \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longmapsto \end{array} \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \\ \frac{1}{2\pi} \rho(r) \end{array} \quad \text{où} \quad \rho(r) = \frac{\alpha \sinh(\alpha r)}{\cosh(\alpha R) - 1} \mathbb{1}_{[0, R]}(r)$$

- l'ensemble des arêtes E est entièrement déterminé par la position des sommets : deux sommets $u, v \in V$ sont adjacents si et seulement si $d_{\mathbb{H}}(u, v) \leq R$:

$$\{u, v\} \in E \iff d_{\mathbb{H}}(u, v) \leq R \quad (1)$$

$$\cosh d_{\mathbb{H}}(u, v) = \cosh r_u \cosh r_v - \sinh r_u \sinh r_v \cos \theta_{uv} \quad (2)$$

Présentation des graphes aléatoires hyperboliques

Définition

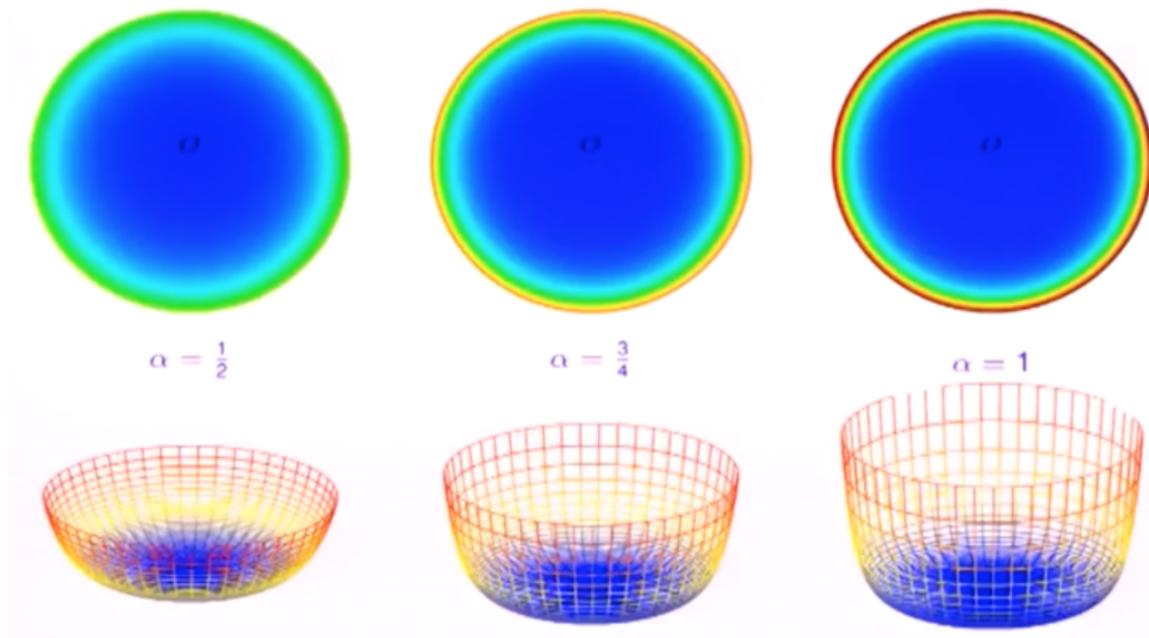


FIGURE – Densités f pour différentes valeurs de α (et $\nu = 1$)

Présentation des graphes aléatoires hyperboliques

Définition

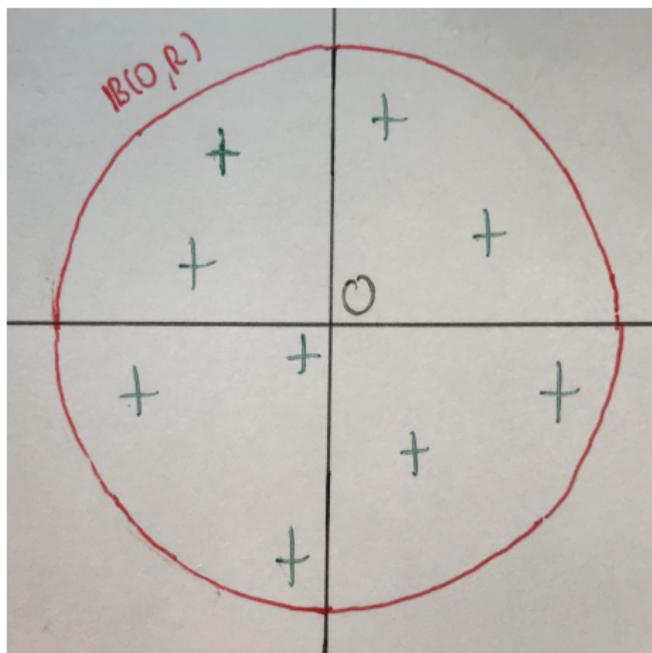


FIGURE – Génération de n points dans $\mathbb{B}(O, R)$

Présentation des graphes aléatoires hyperboliques

Définition

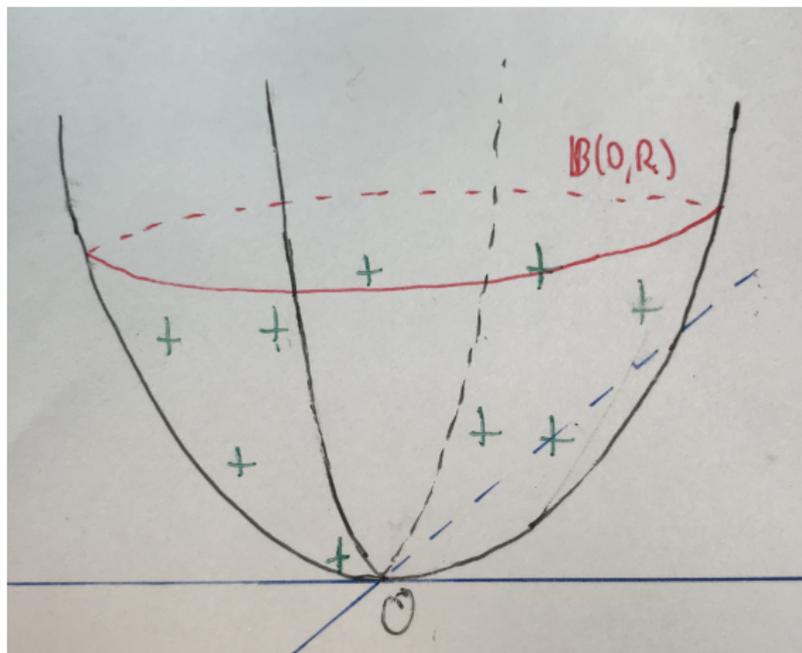


FIGURE – Courbure du plan ($K = -\alpha^2$)

Présentation des graphes aléatoires hyperboliques

Définition

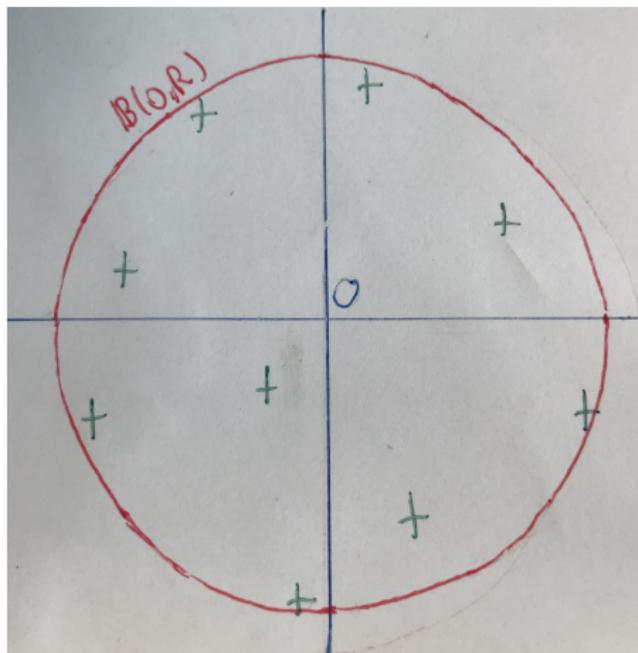


FIGURE – Projection sur le plan de courbure nulle

Présentation des graphes aléatoires hyperboliques

Définition

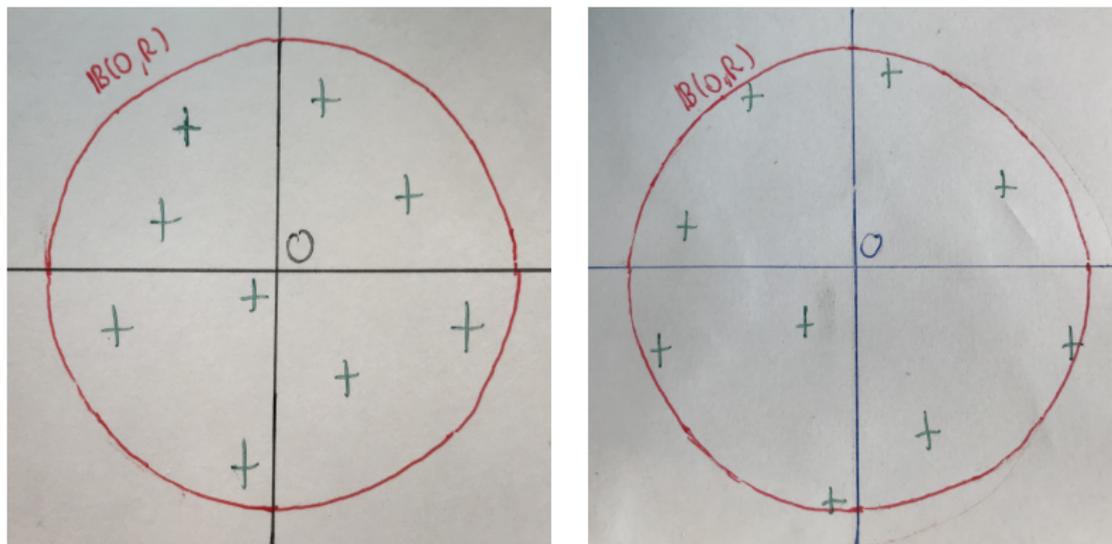


FIGURE – Gauche : points initialement générés | Droite : point obtenus dans l'espace hyperbolique

Présentation des graphes aléatoires hyperboliques

Forme des boules

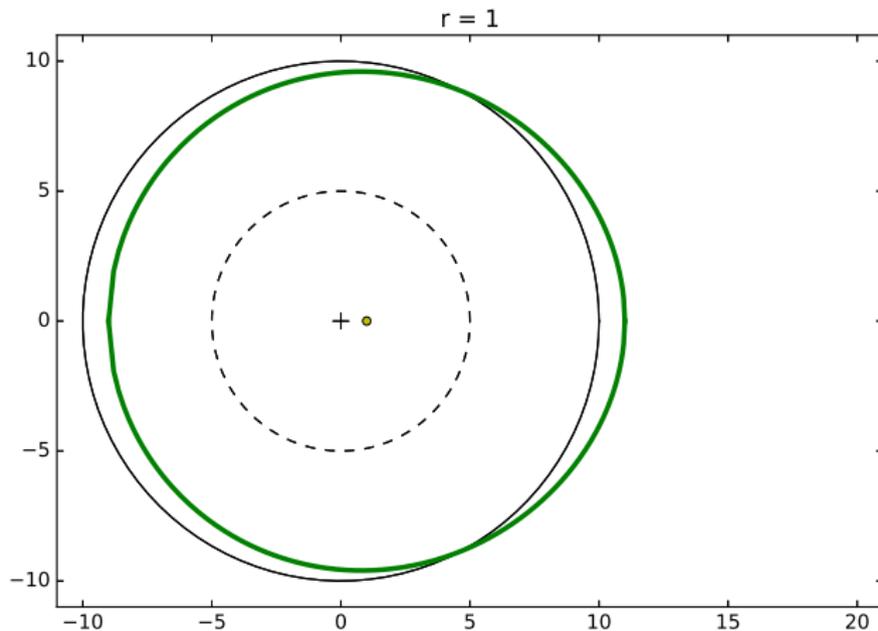


FIGURE - $\mathbb{B}_{\mathbb{H}}(u, 10)$ avec $r_u = 2$

Présentation des graphes aléatoires hyperboliques

Forme des boules

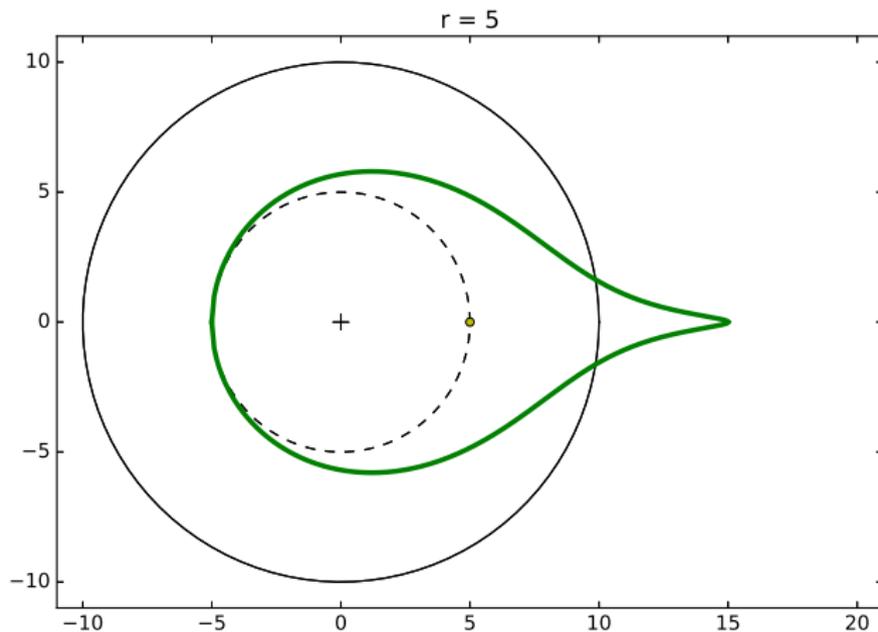


FIGURE - $\mathbb{B}_{\mathbb{H}}(u, 10)$ avec $r_u = 5$

Présentation des graphes aléatoires hyperboliques

Forme des boules

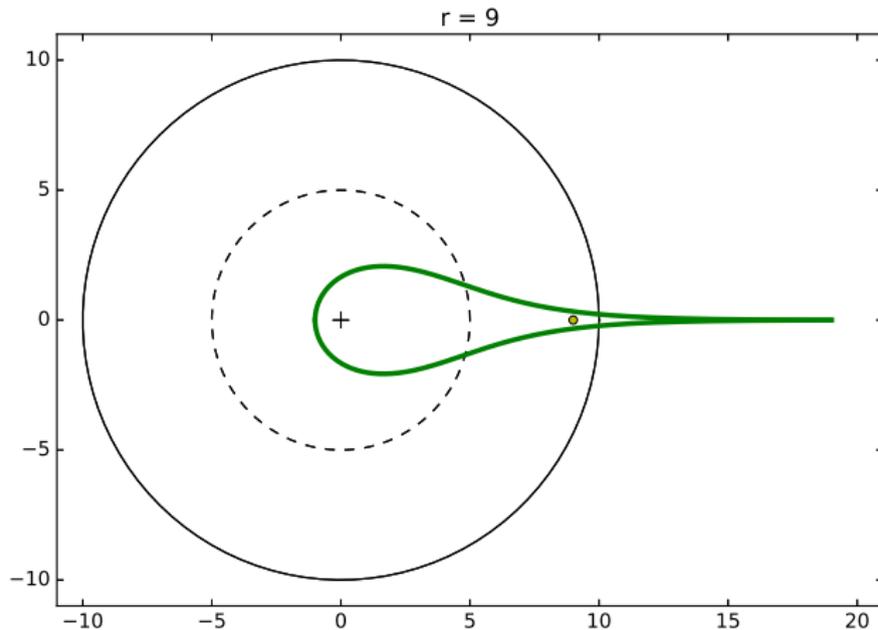


FIGURE - $\mathbb{B}_{\mathbb{H}}(u, 10)$ avec $r_u = 9$

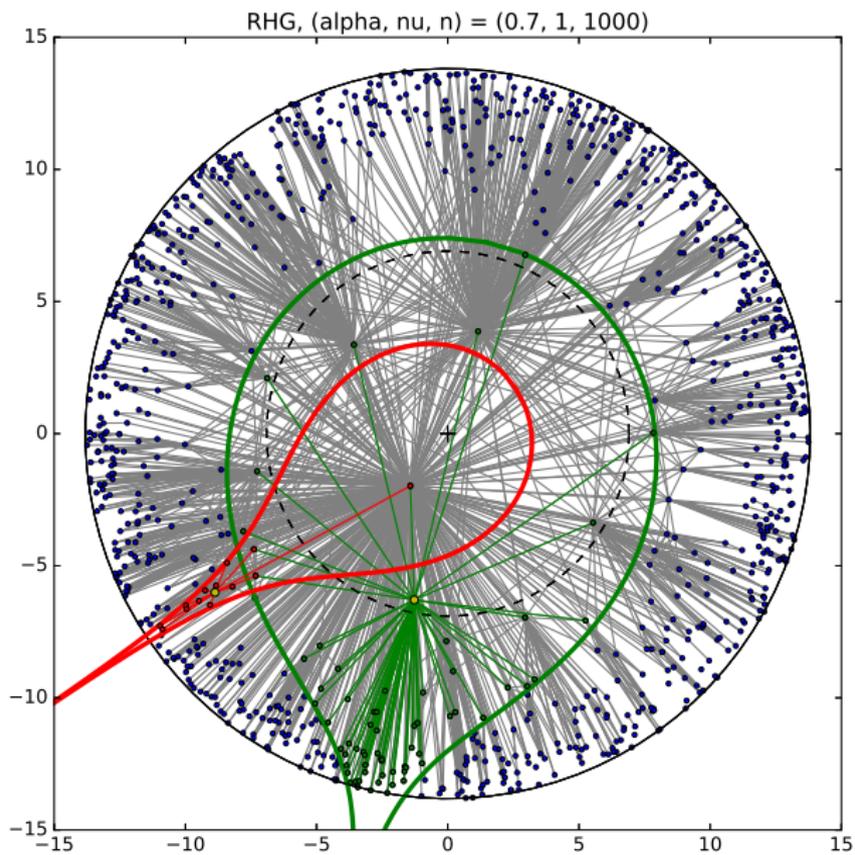


FIGURE - $\mathcal{G}_{0.7, 1}(1000)$

Présentation des graphes aléatoires hyperboliques

Effet du paramètre α

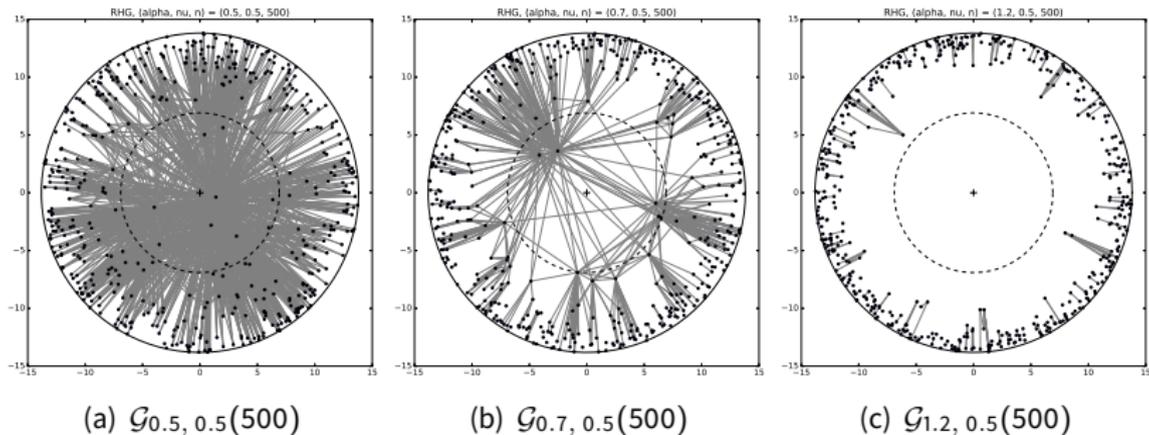


FIGURE – Variation du paramètre α

Présentation des graphes aléatoires hyperboliques

Effet du paramètre ν

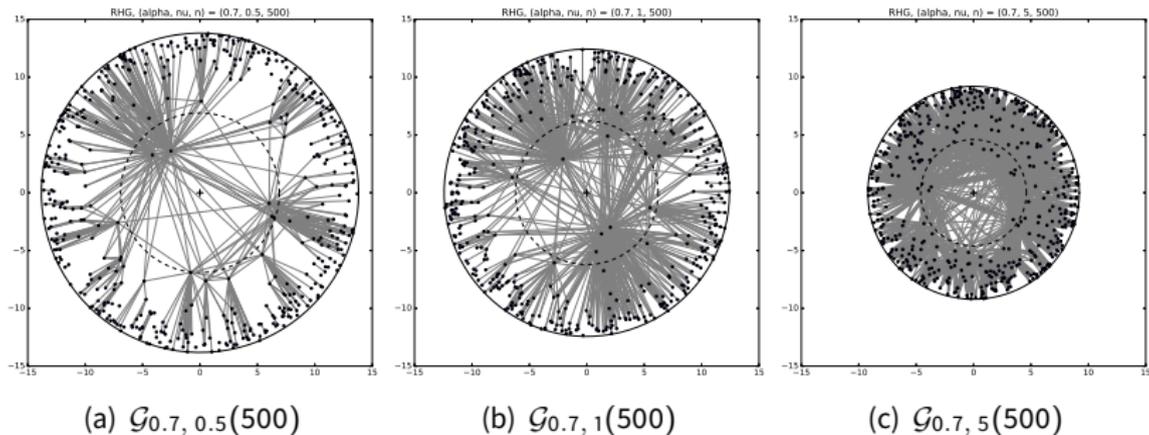


FIGURE – Variation du paramètre ν

Il s'agit de réseaux/graphes ayant un grand nombre de sommets et :

- étant en loi de puissance : il existe une constant C et un exposant $\beta > 0$ tels que pour une plage importante de $k \in [k_-, k_+]$, on a :

$$\text{card}(\{\text{sommets de degré } k\}) \simeq Ck^{-\beta}$$

- ayant un fort coefficient de clustering,
- étant denses : le nombre d'arêtes est proportionnel au nombre de sommets,
- vérifiant le phénomène de petit-monde.

Il s'agit de réseaux/graphes ayant un grand nombre de sommets et :

- étant en loi de puissance : il existe une constante C et un exposant $\beta > 0$ tels que pour une plage importante de $k \in [k_-, k_+]$, on a :

$$\text{card}(\{\text{sommets de degré } k\}) \simeq Ck^{-\beta}$$

- ayant un fort coefficient de clustering,
- étant denses : le nombre d'arêtes est proportionnel au nombre de sommets,
- vérifiant le phénomène de petit-monde.

→ nombreux graphes des réseaux sociaux, d'internet, de la nature ...

Présentation des graphes aléatoires hyperboliques

Le graphe d'Internet

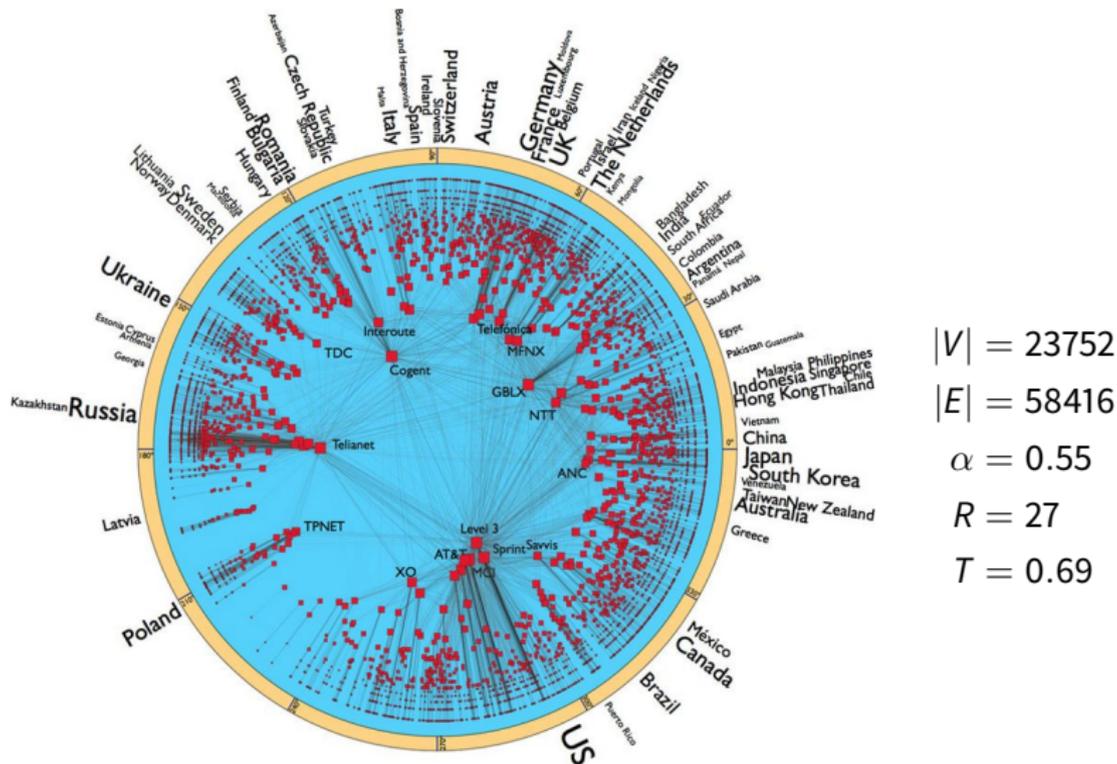


FIGURE – Le graphe hyperbolique d'Internet

- 1 Présentation des graphes aléatoires hyperboliques
- 2 Génération rapide, vérification de quelques propriétés
- 3 Le modèle push & pull

Génération rapide, vérification de quelques propriétés

L'algorithme naïf

Algorithm 1: greedy generator of $\mathcal{G}_{\alpha, \nu}(n)$

Input : α, ν, n

Output: V, E

```
1  $R \leftarrow 2 \log(n/\nu)$ 
   //  $V$  ordered list of vertices,  $E$  set of edges
2  $V \leftarrow []$ 
3  $E \leftarrow \{\}$ 
   // Generation of  $V$ 
4 for  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ :
5      $r \leftarrow$  random radius with density  $\rho = \rho_{\alpha, \nu}$ 
6      $\theta \leftarrow$  random angle uniformly chosen in  $[0, 2\pi[$ 
7      $V.addPoint((r, \theta))$ 
   // Generation of  $E$ 
8 for  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ :
9     for  $j \in \llbracket i + 1, n \rrbracket$ :
10        if  $d_{\mathbb{H}}(V[i], V[j]) \leq R$ :
11             $E.addEdge(\{i, j\})$ 
```

$\mathcal{O}(n^2) \rightarrow$ trop lent en pratique

Génération rapide, vérification de quelques propriétés

Division en couches

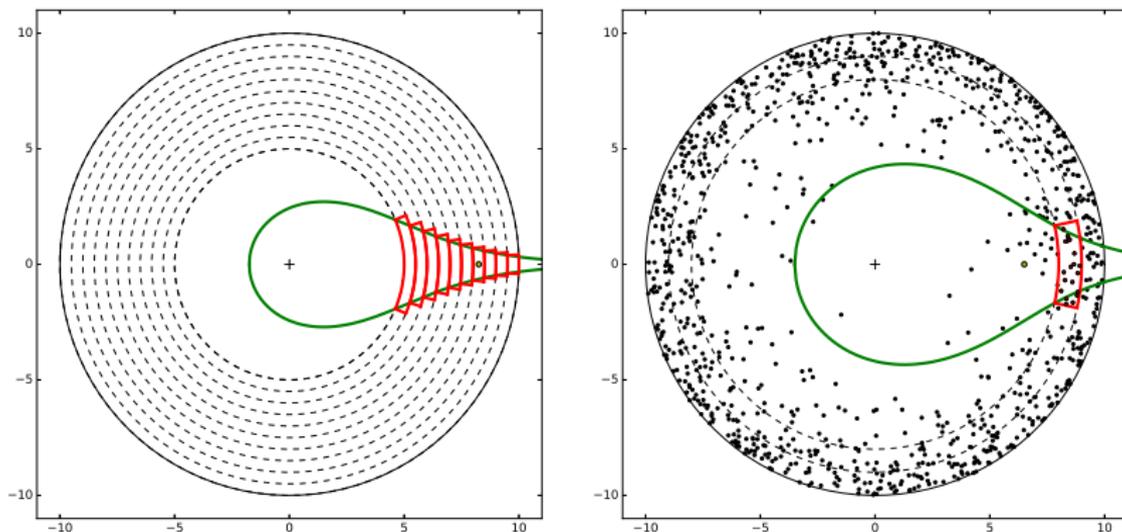


FIGURE – Décomposition en requêtes

A chaque point, on associe une requête de type : $(i, b, \theta_{\min}, \theta_{\max})$

Génération rapide, vérification de quelques propriétés

Idées de l'algorithme rapide

- étape 1 on génère V comme précédemment. Chacun des sommets est rangé dans sa bande, et une requête qui lui est associée est envoyée à chaque bande supérieure.
- étape 2 dans chaque bande, on trie la liste des sommets par leur angle ainsi que la liste des requêtes reçues par angle minimal.
- étape 3 on génère ensuite la liste des arêtes. Tous les sommets de la première bande forment une clique, puis on procède à un parcours des sommets et des requêtes de chaque bande afin de ne tester que les arêtes potentielles.

Génération rapide, vérification de quelques propriétés

temps de génération

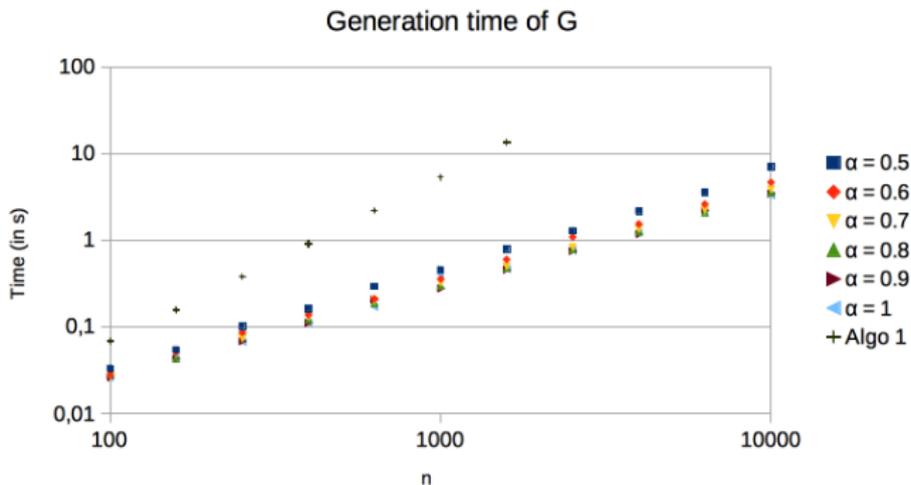


FIGURE – Temps de génération des graphes pour chaque algorithme ($\nu = 1$)

- 1 Présentation des graphes aléatoires hyperboliques
- 2 Génération rapide, vérification de quelques propriétés
- 3 Le modèle push & pull

On considère la propagation de rumeur suivante dans la composante géante de $\mathcal{G}_{\alpha, \nu}(n)$:

- un sommet uniformément choisi reçoit initialement l'information, à $t = 0$,
- puis à chaque pas de temps, les phénomènes suivant se produisent simultanément :

push chaque sommet ayant déjà reçu l'information choisit uniformément l'un de ses voisins et lui transmet l'information s'il ne l'a pas déjà,

pull chaque sommet qui n'a pas encore reçu l'information choisit uniformément l'un de ses voisins. Si celui-ci possède l'information, il la récupère.

→ On cherche le temps moyen nécessaire à la propagation de l'information dans toute la composante géante.

Le modèle push & pull

Une simulation

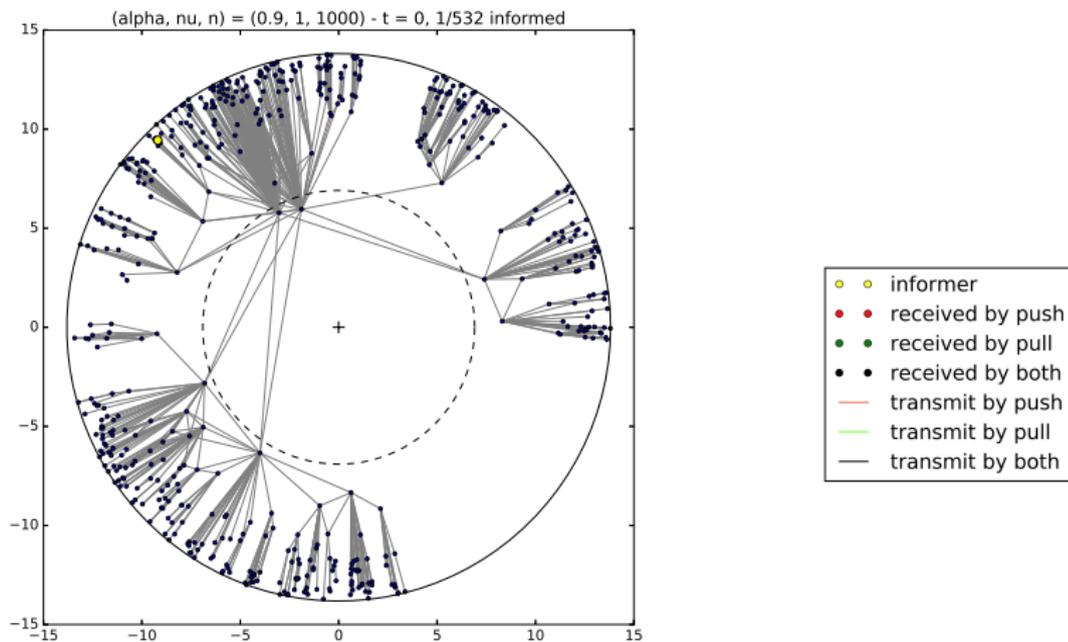


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

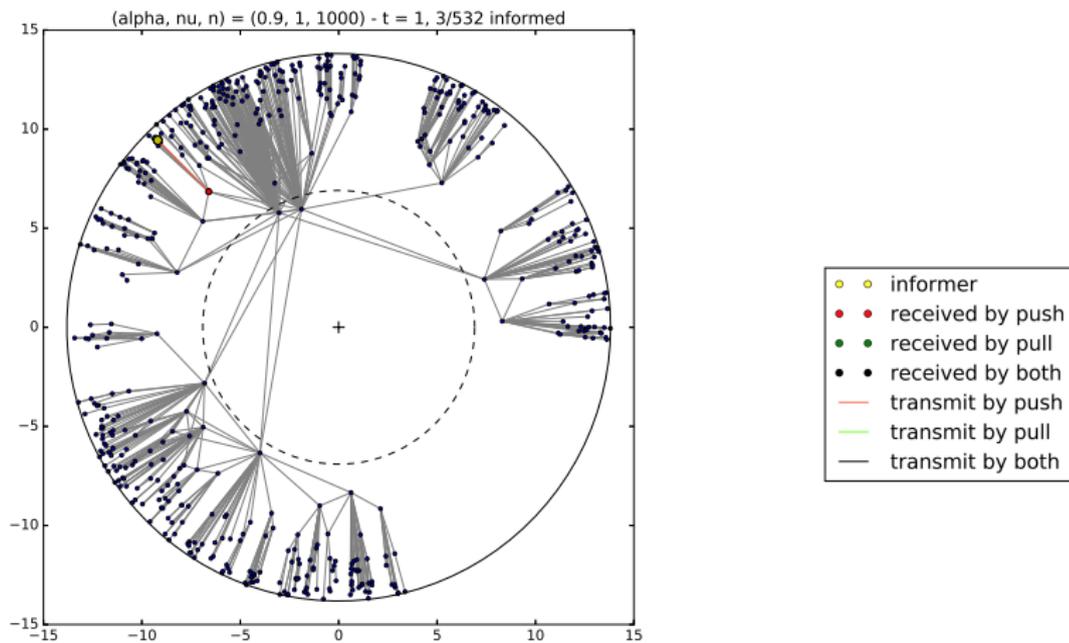


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

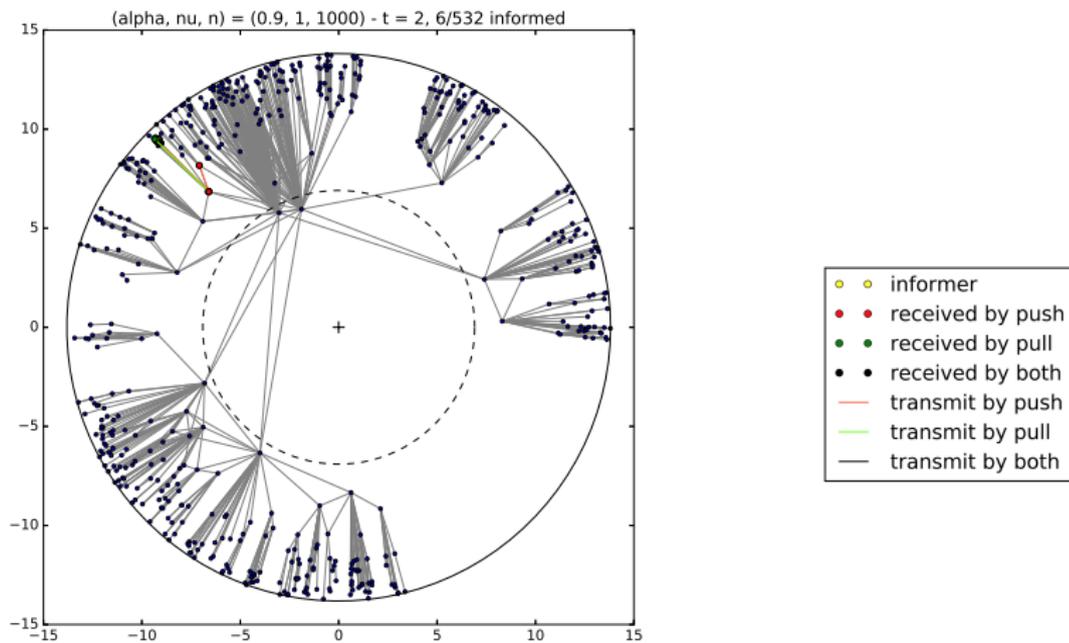


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

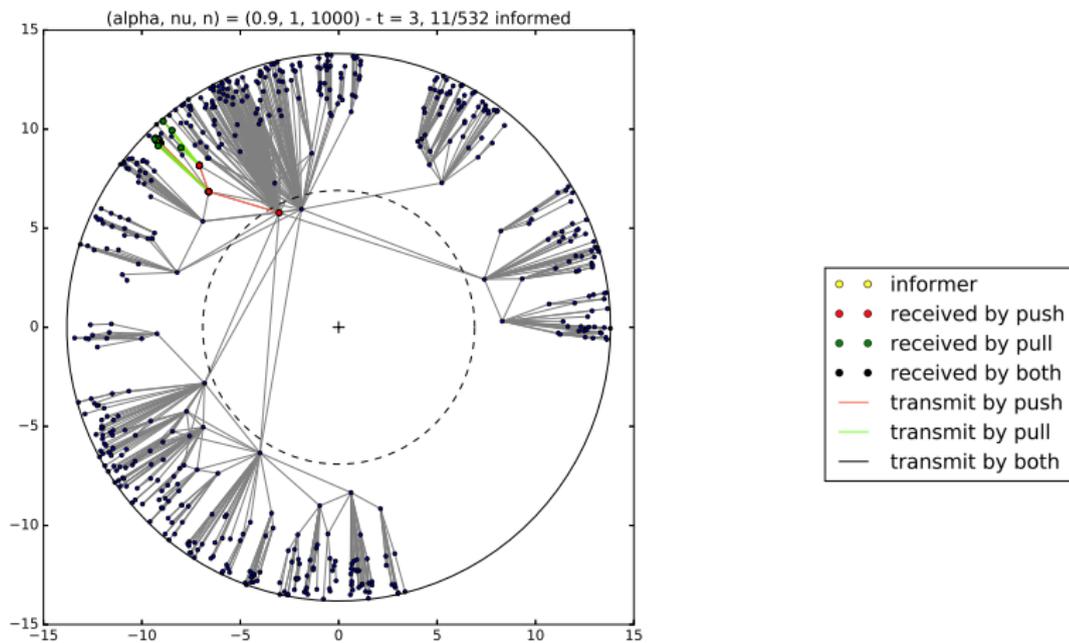


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

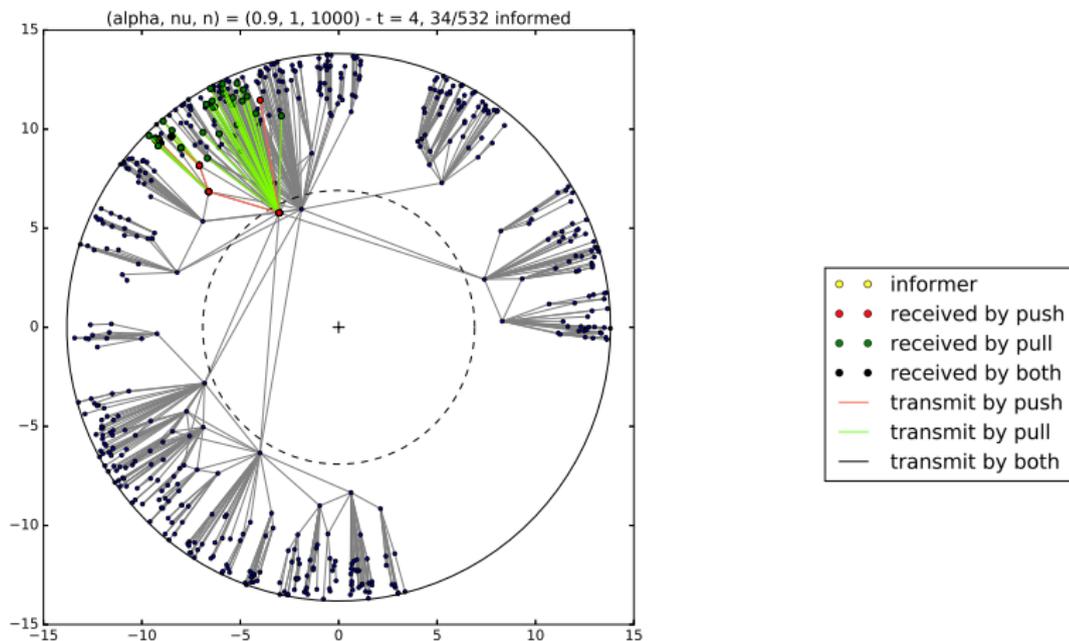


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

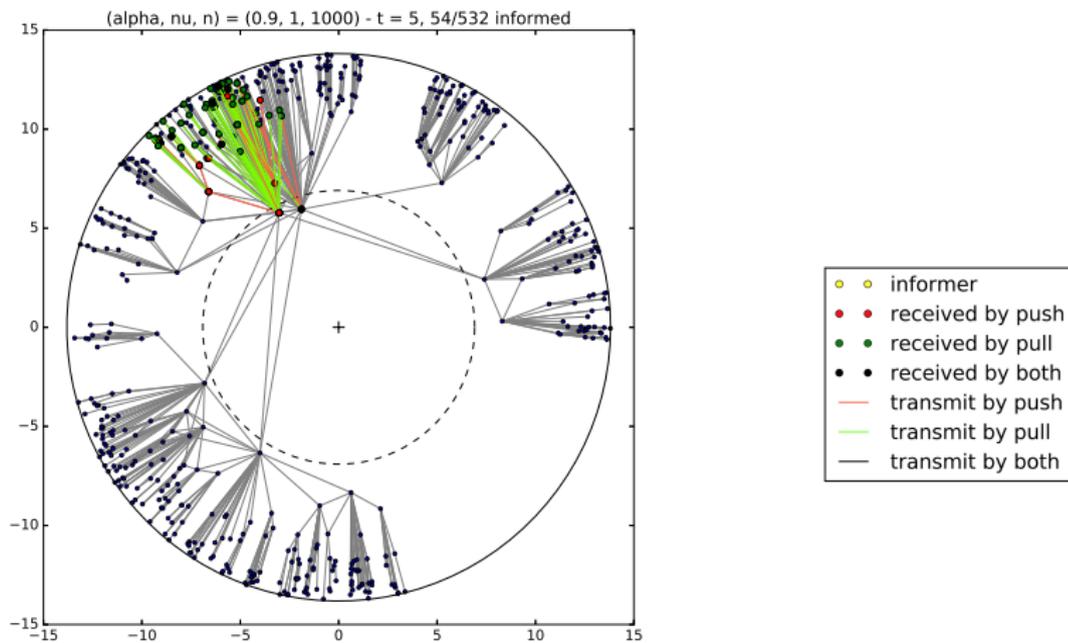


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

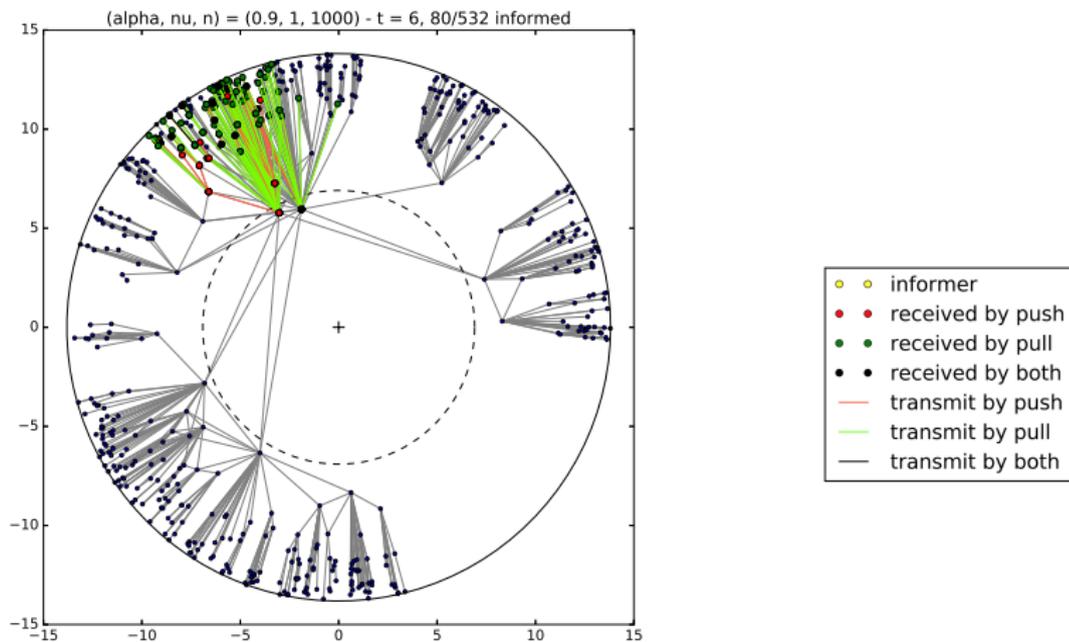


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8, 1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

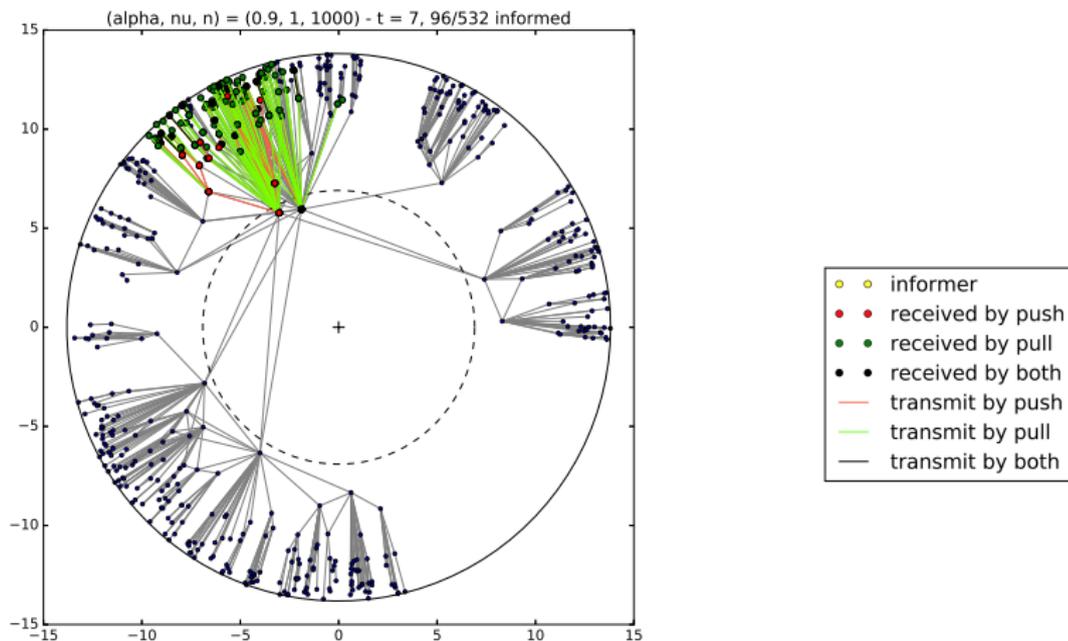


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

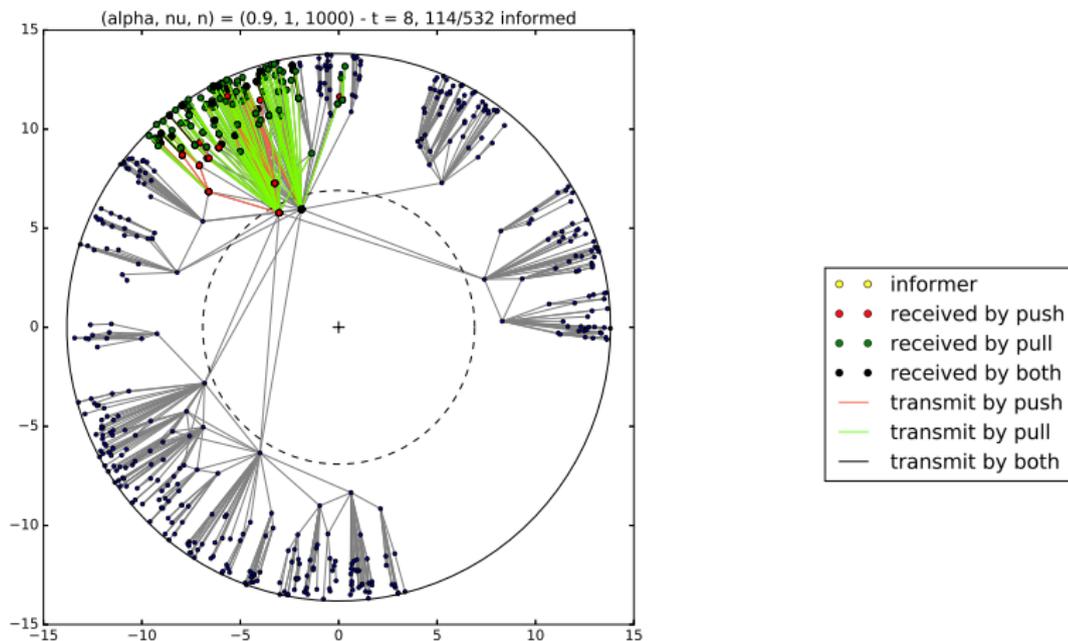


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8, 1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

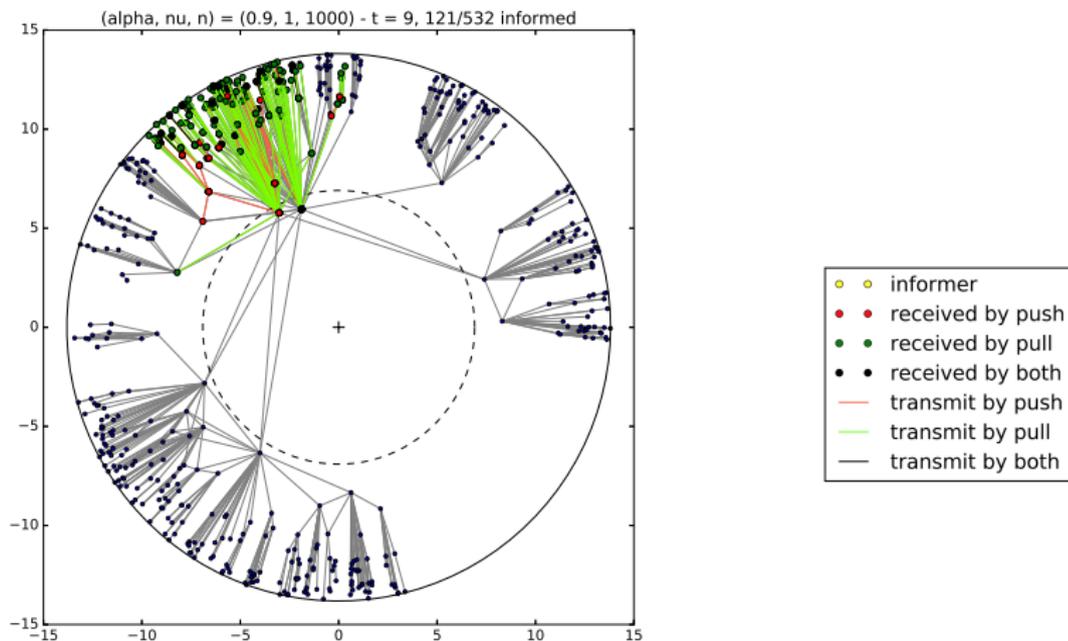


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

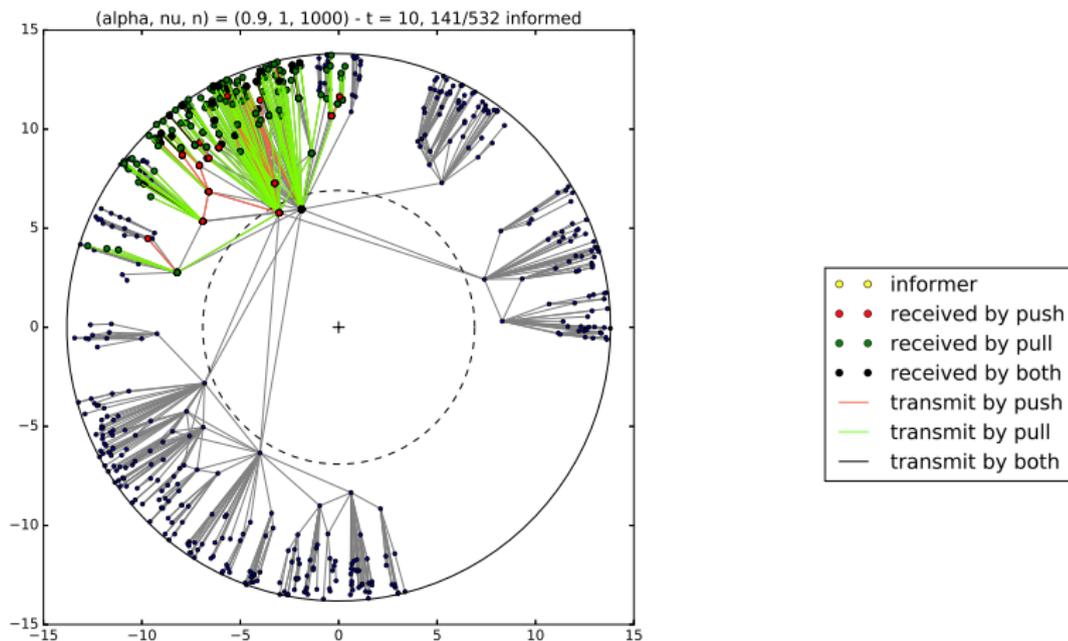


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

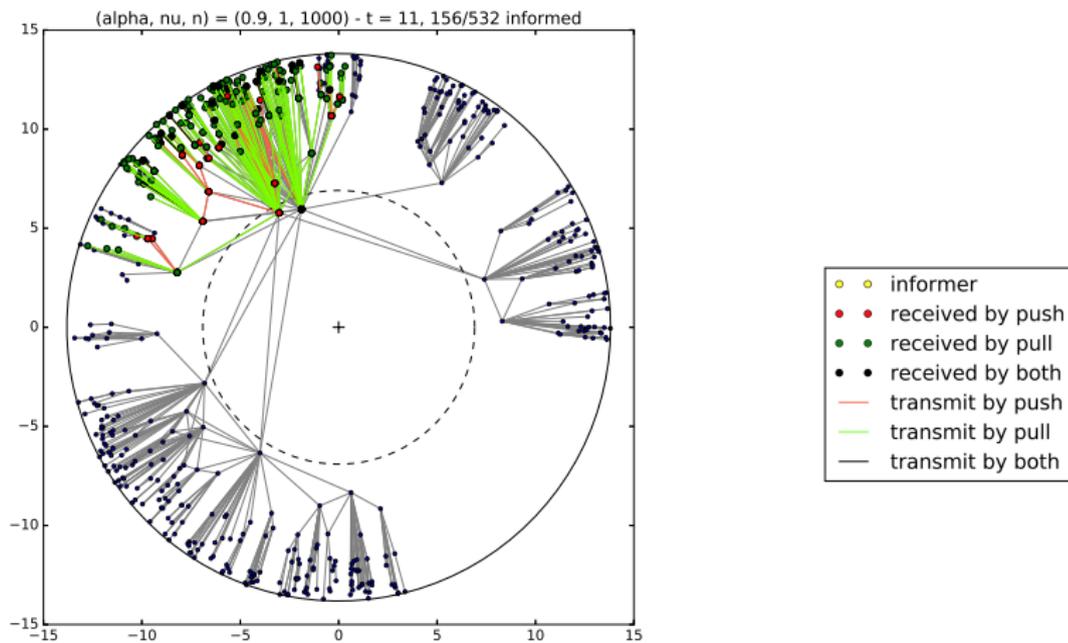


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

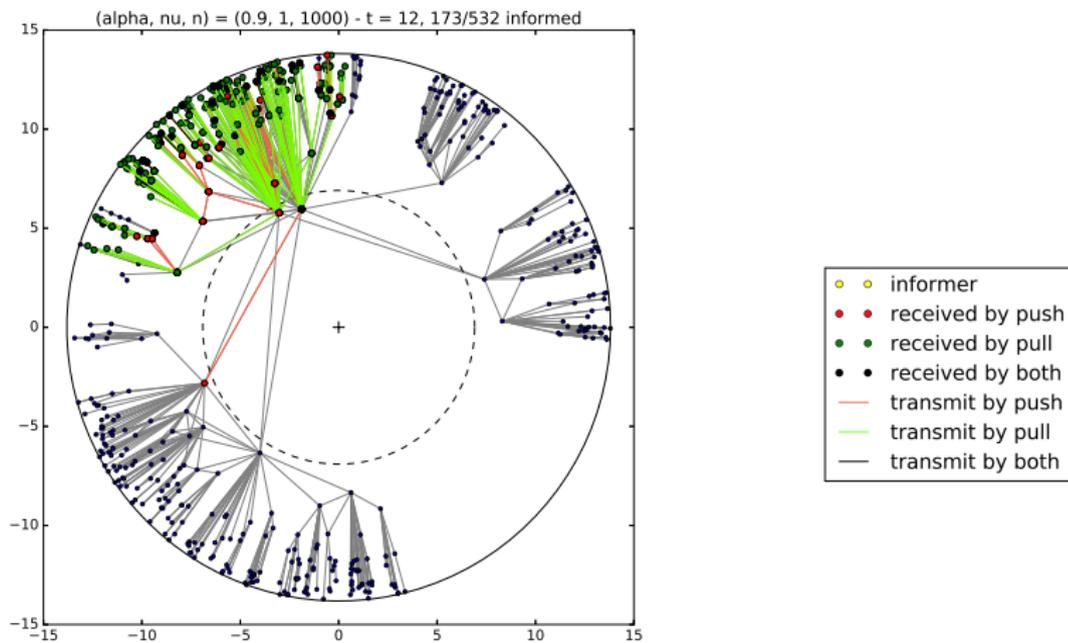


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

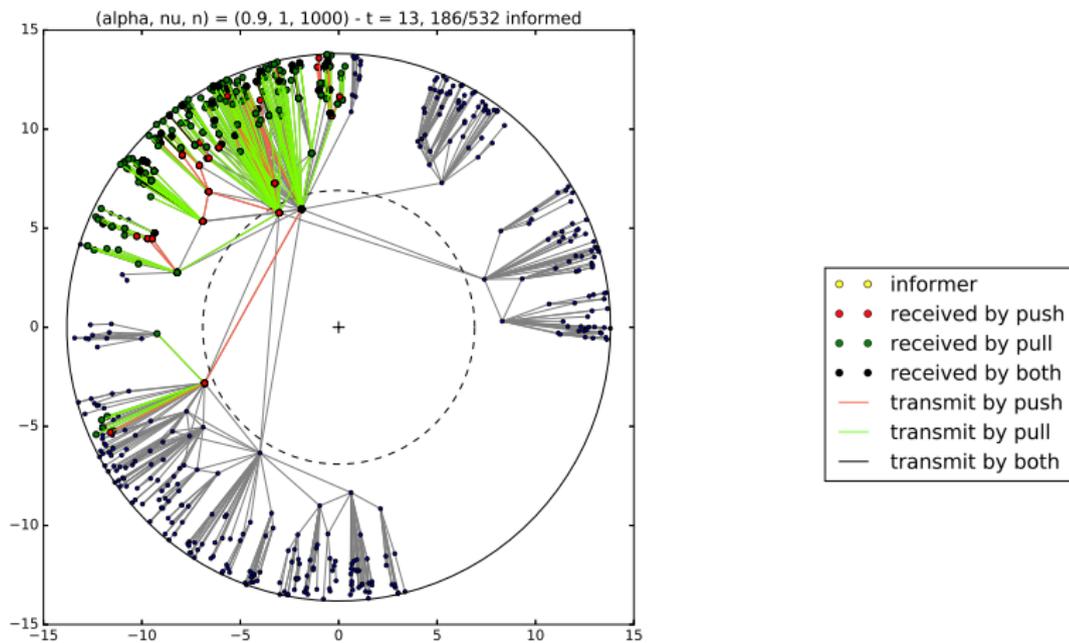


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

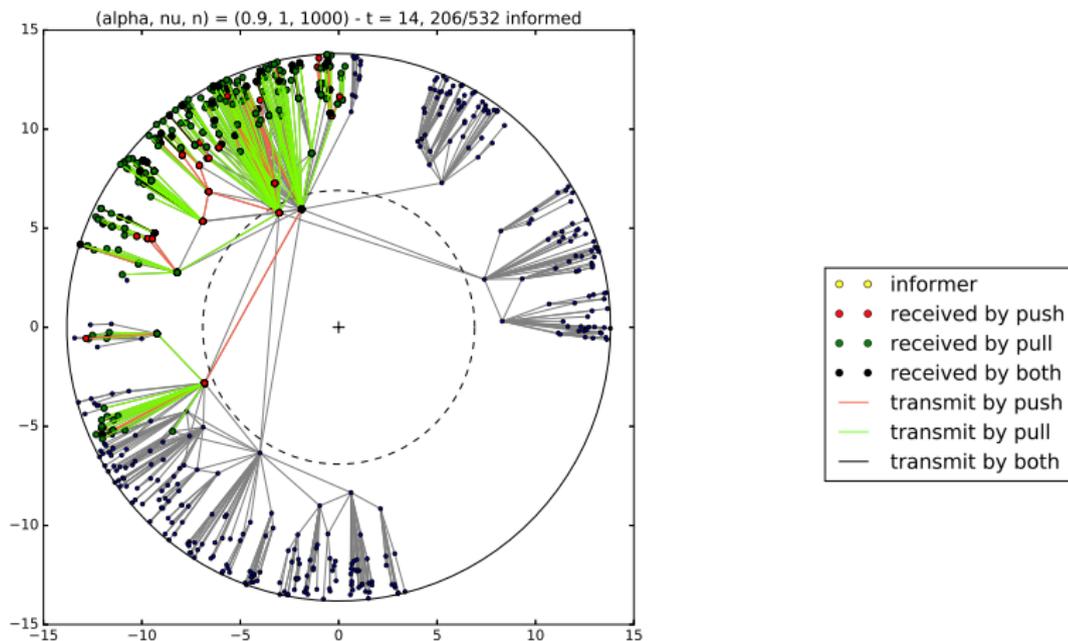


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

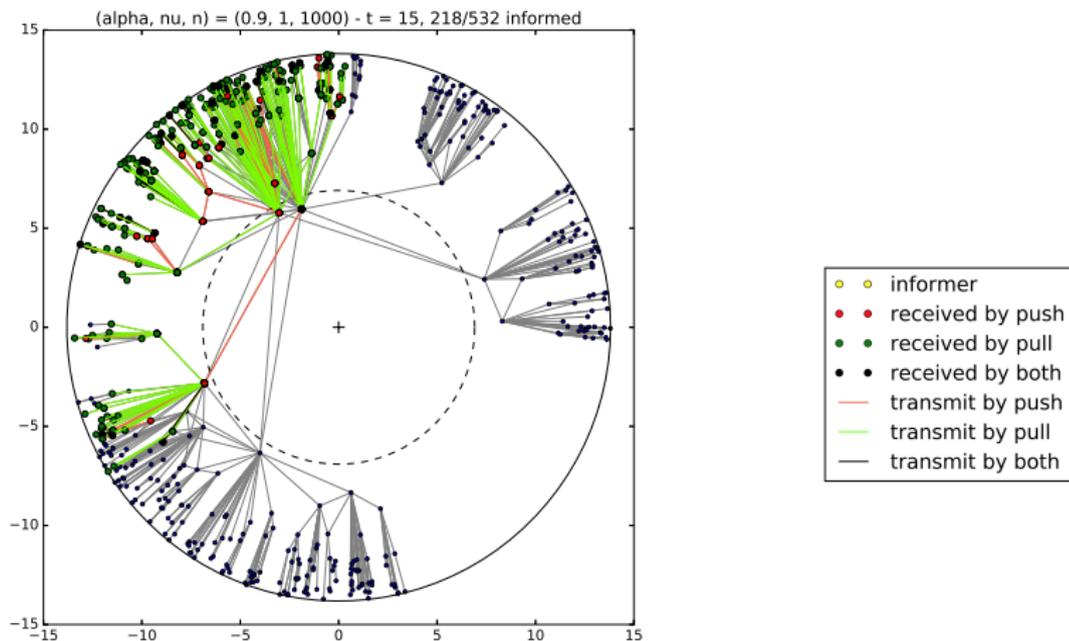


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

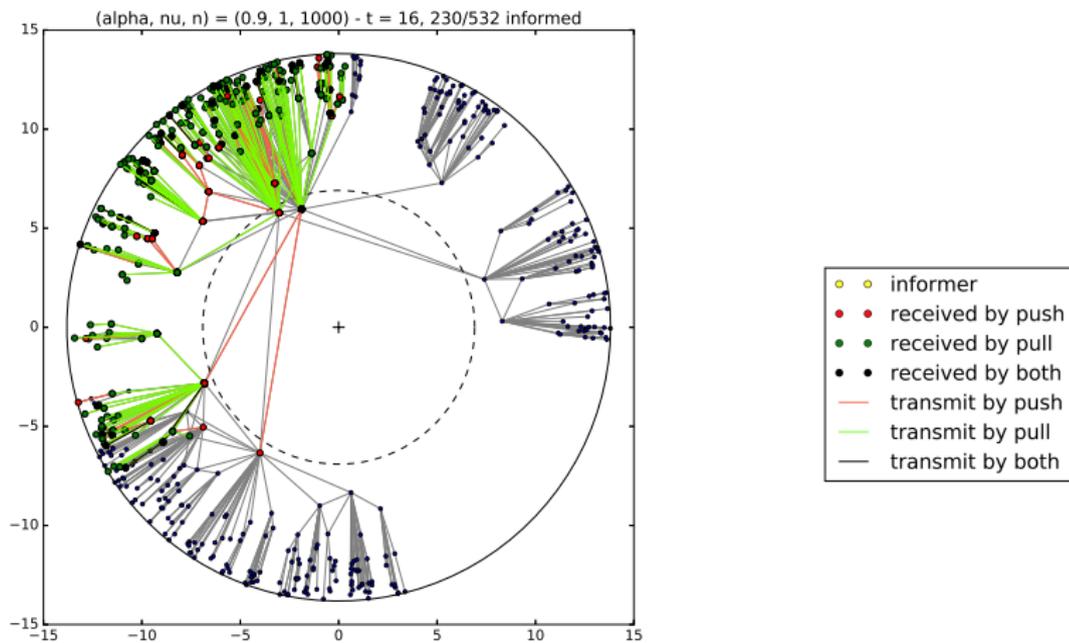


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

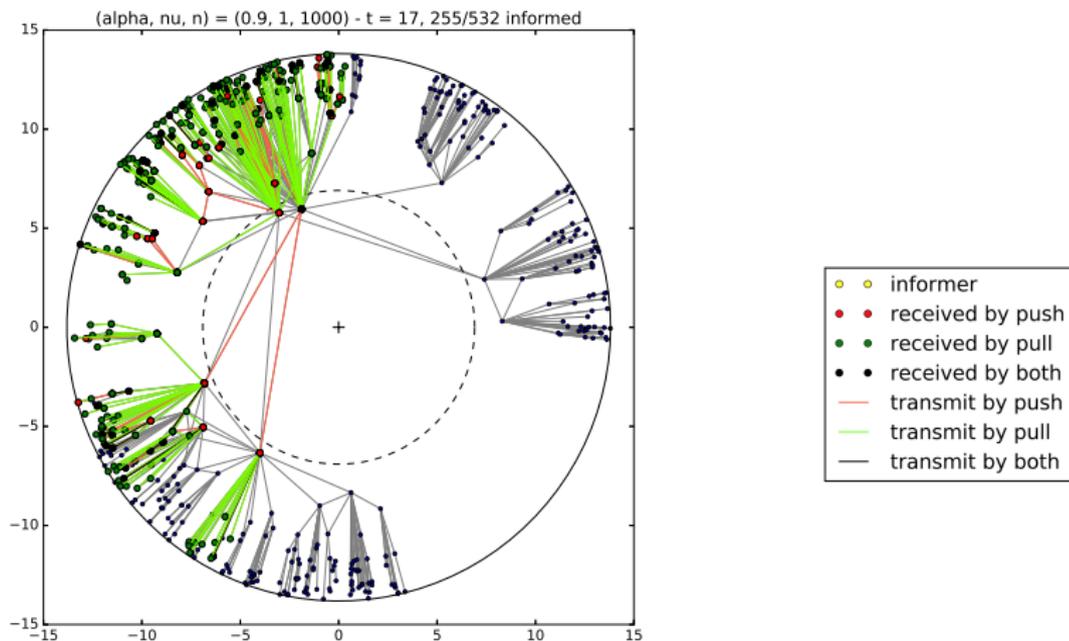


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

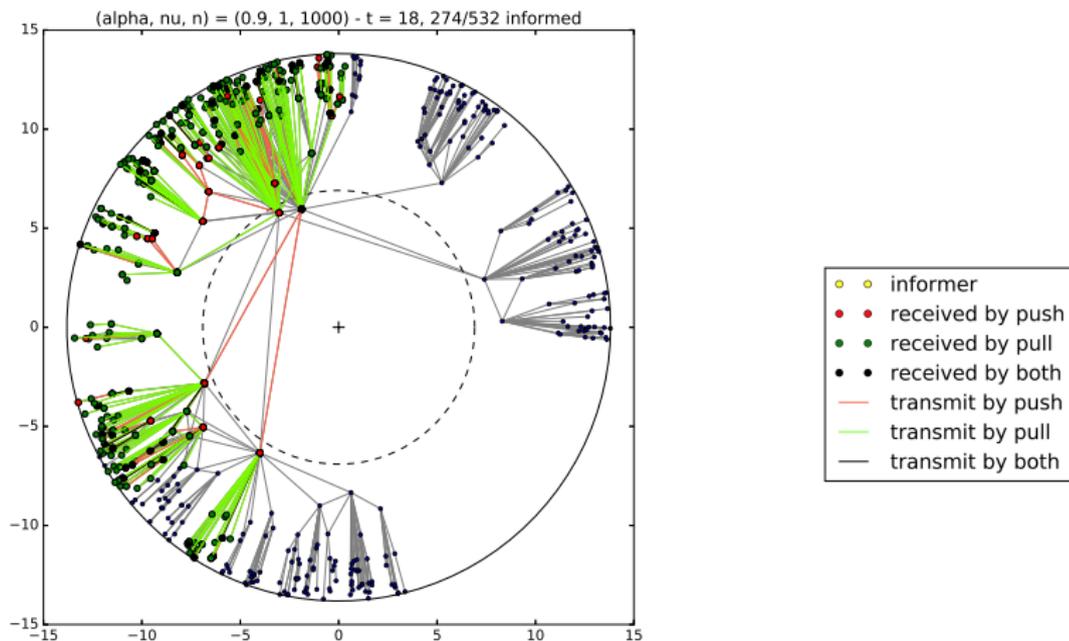


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

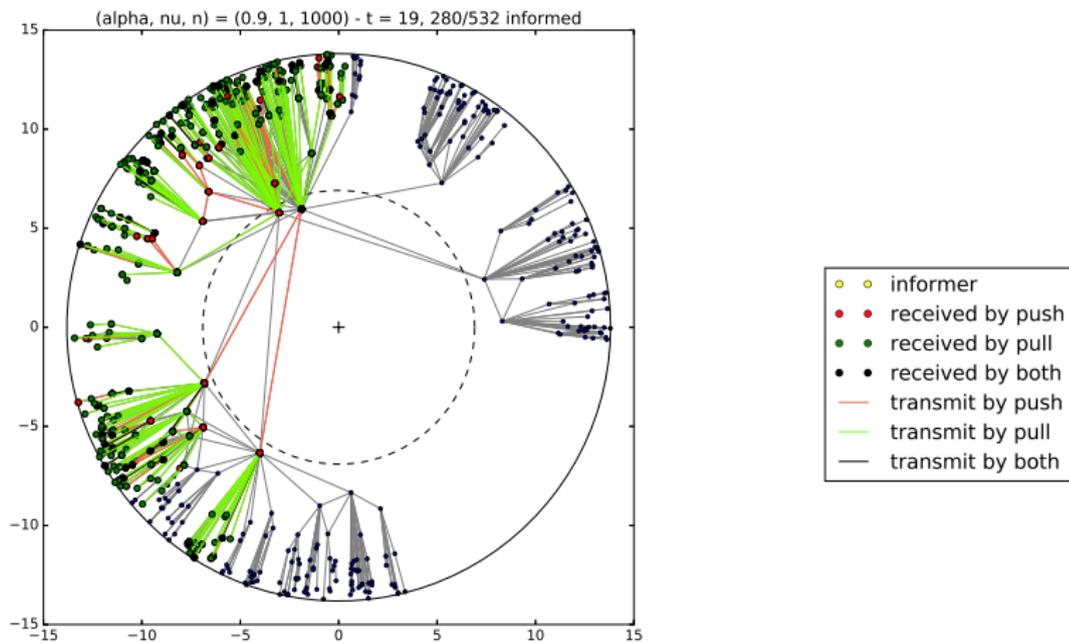


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

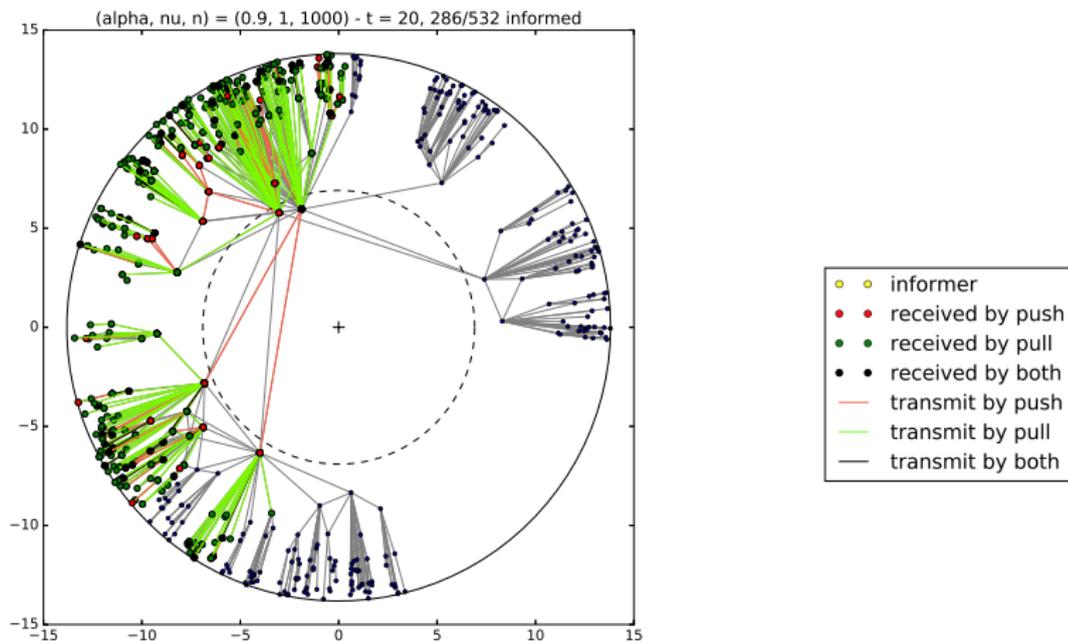


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

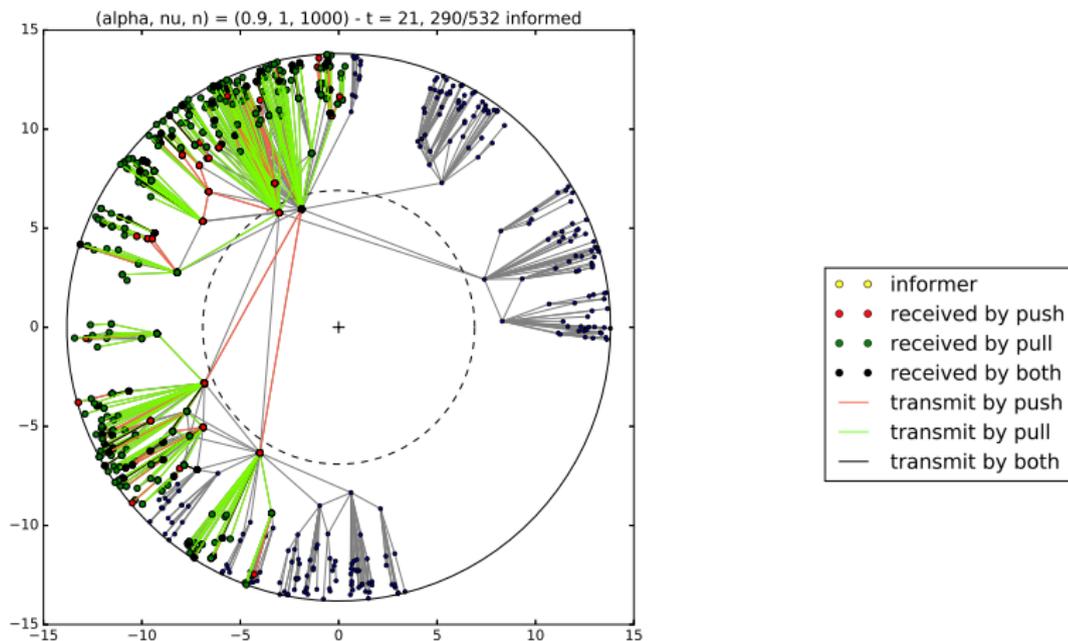


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

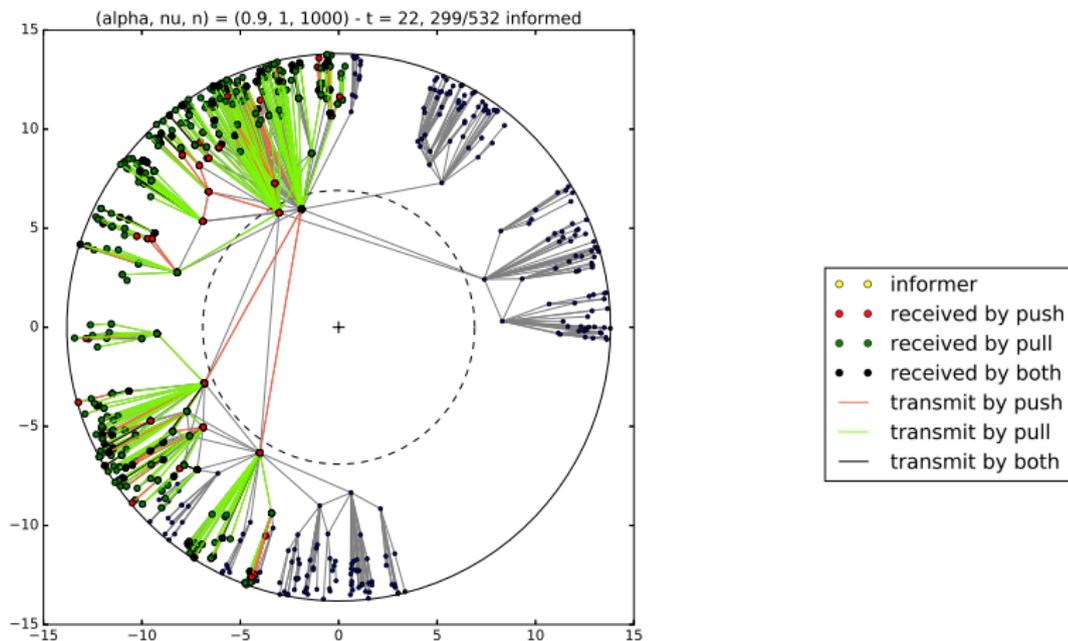


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

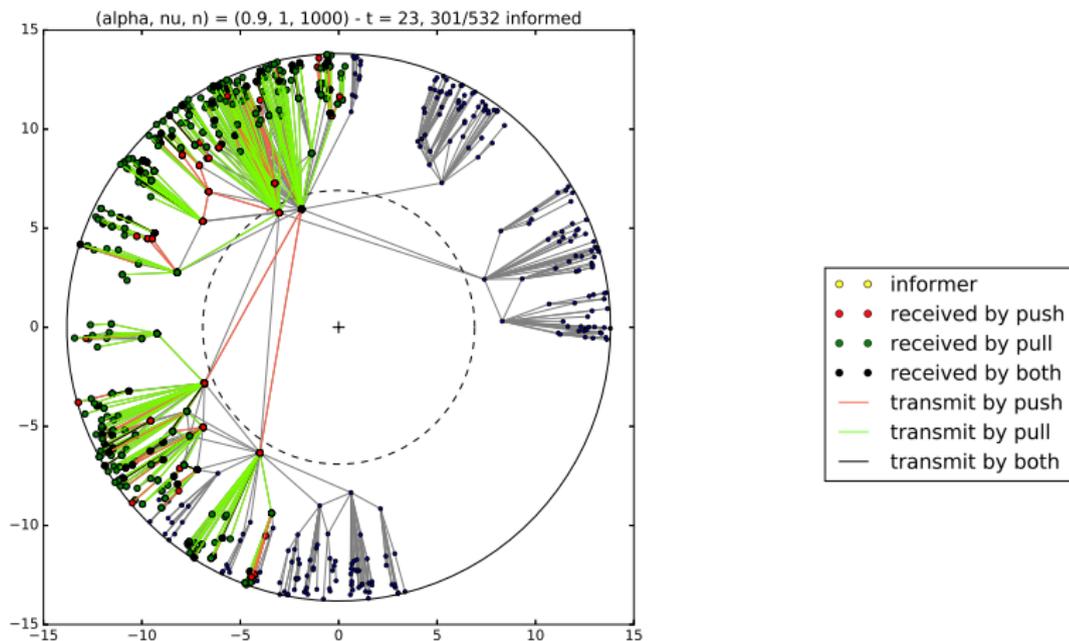


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

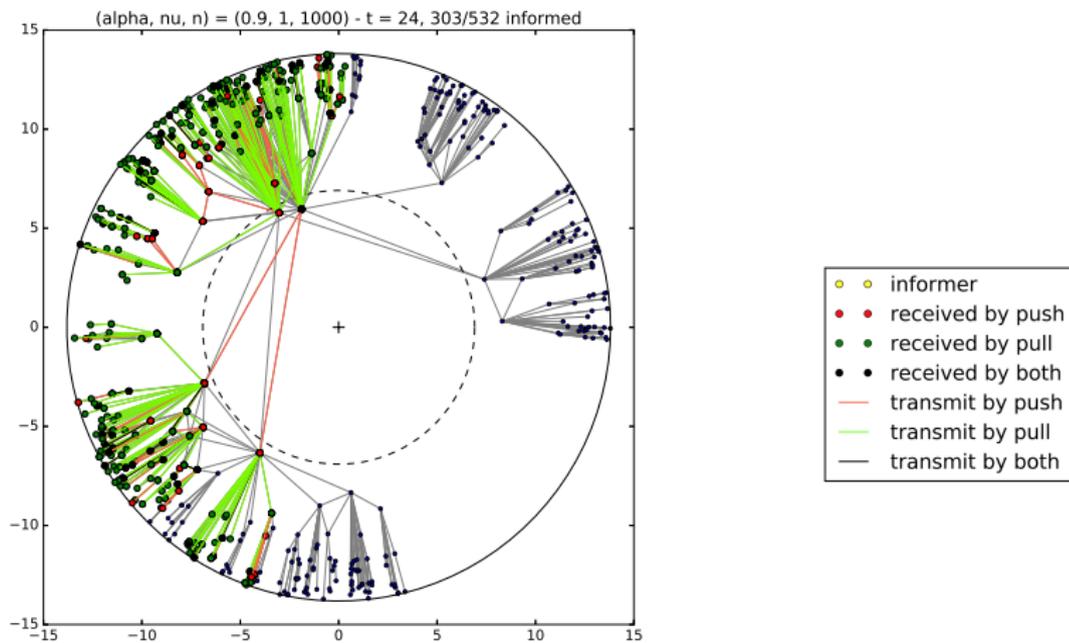


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

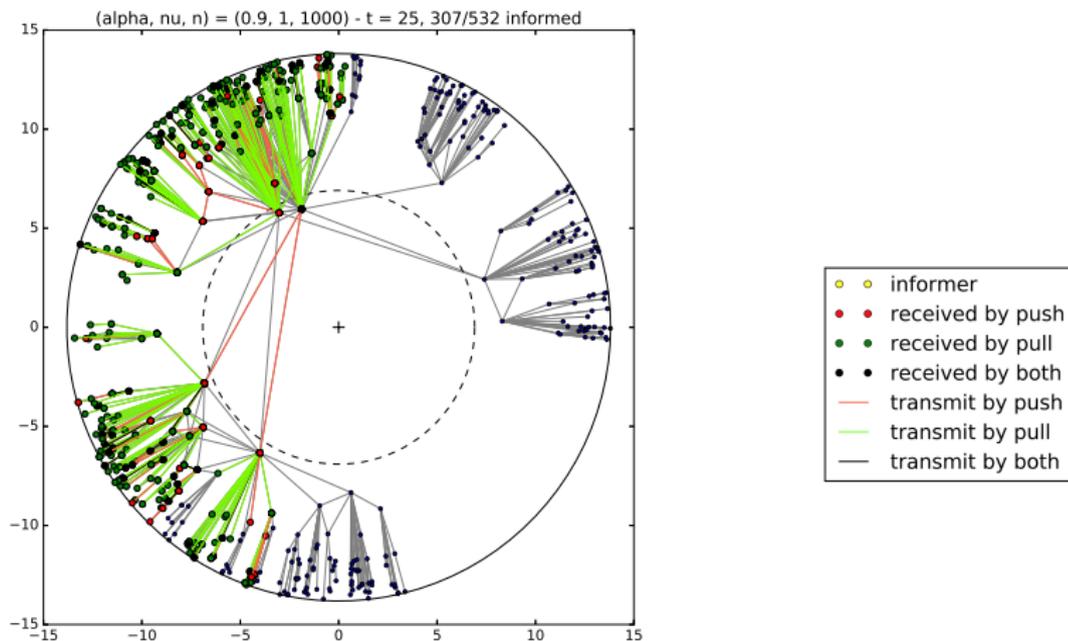


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

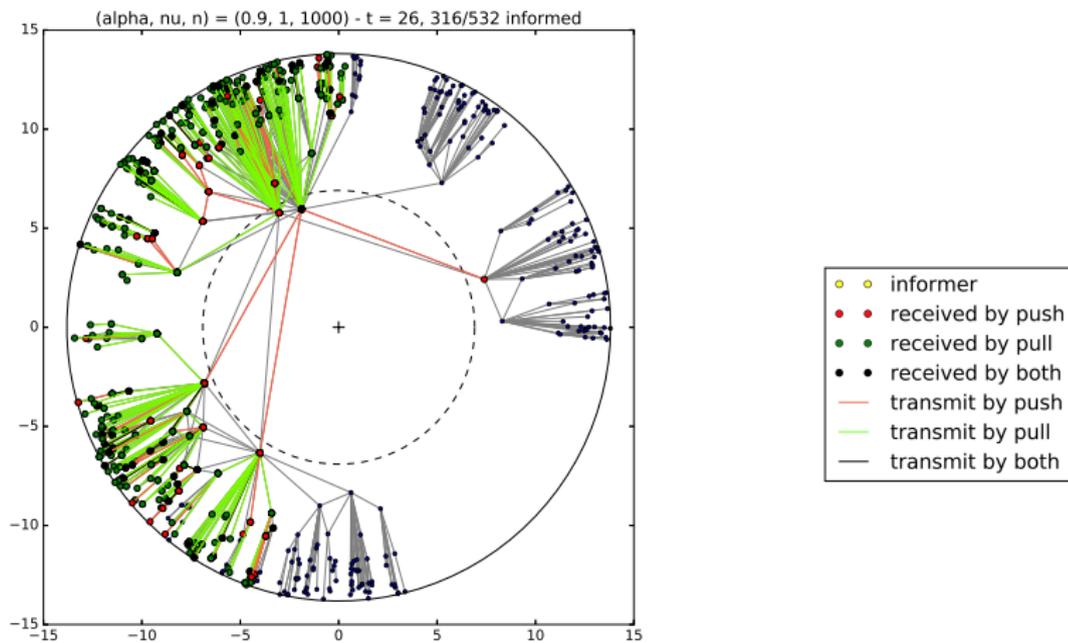


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

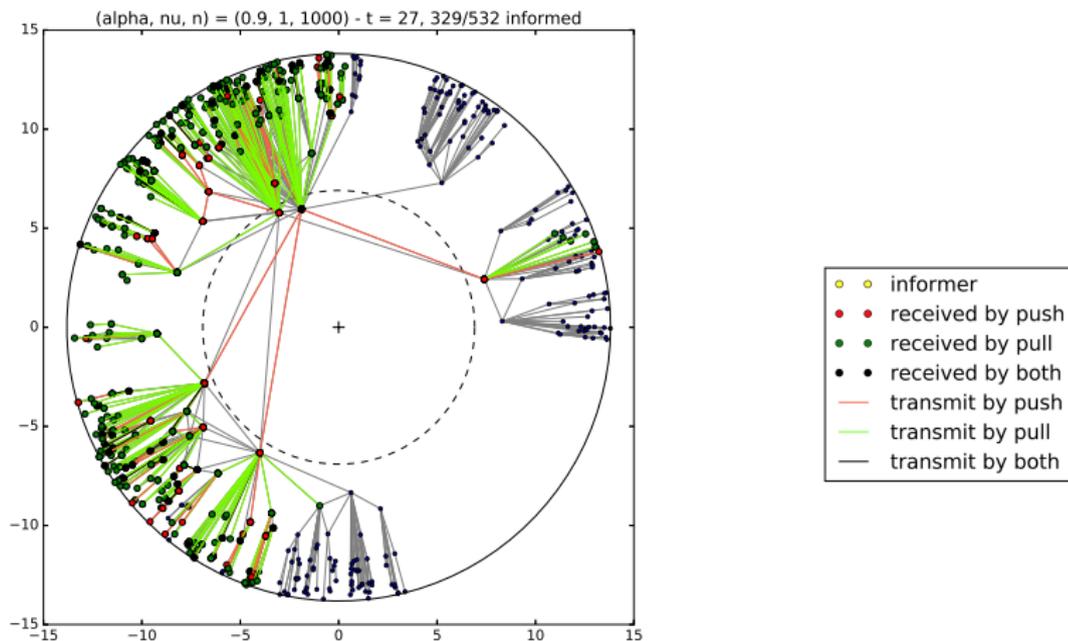


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8, 1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

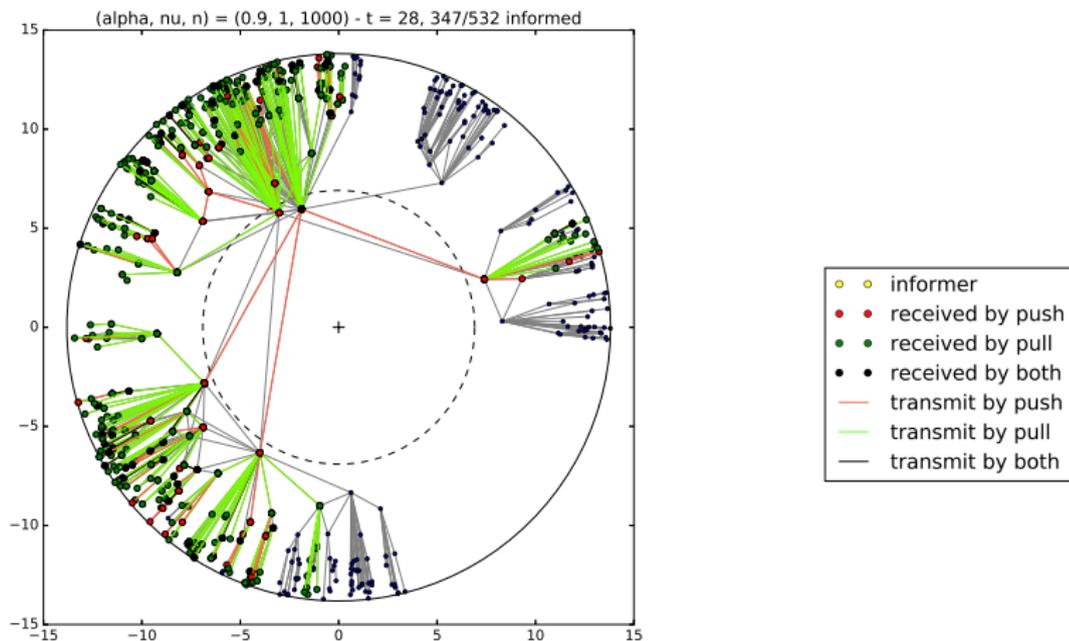


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8, 1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

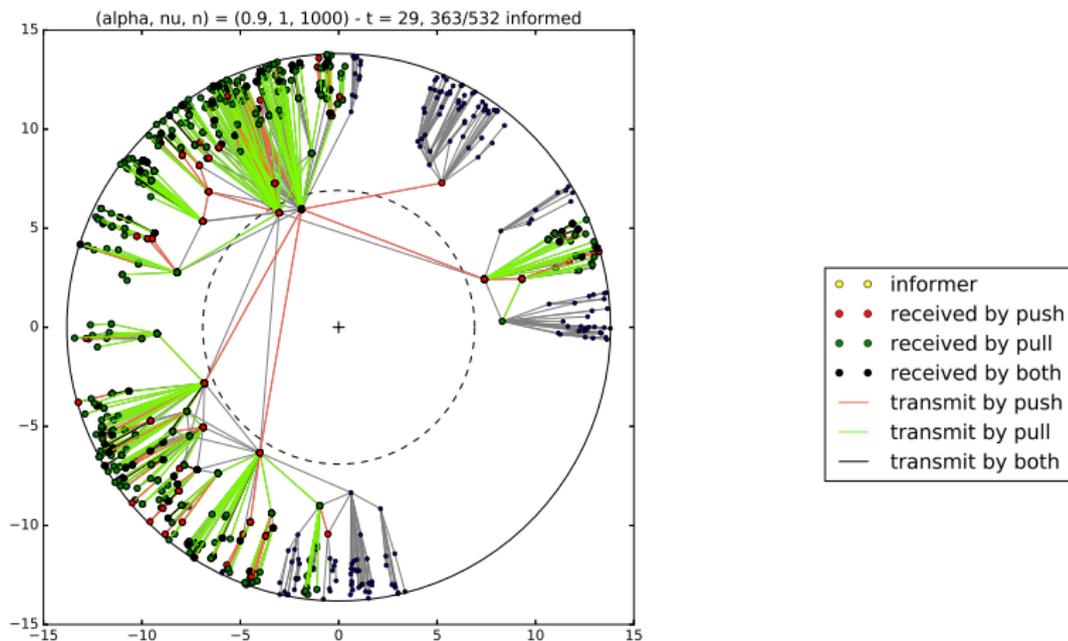


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8, 1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

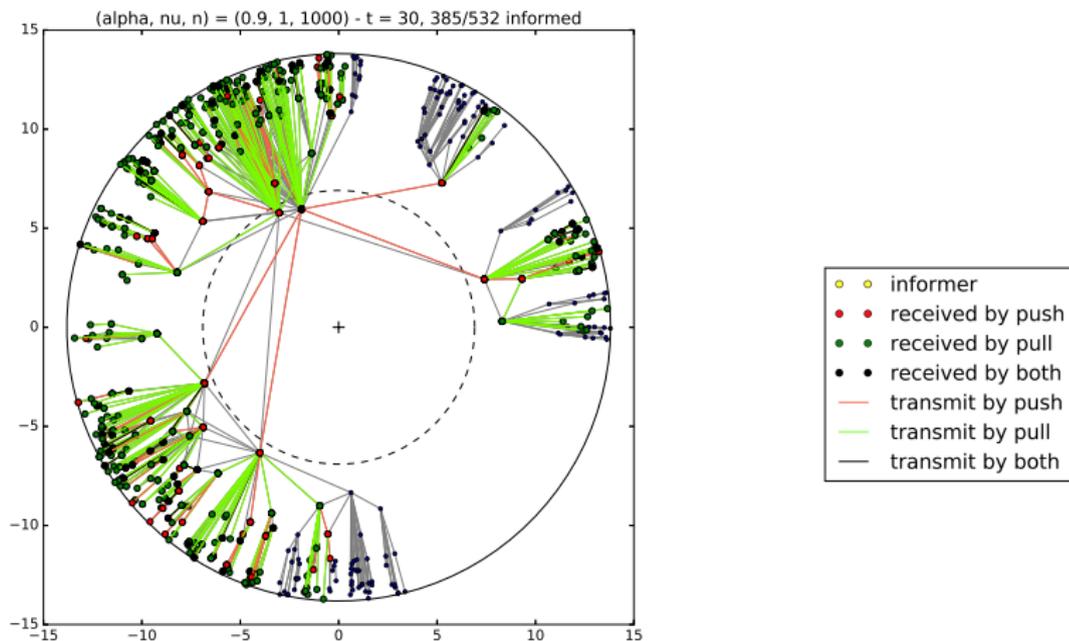


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

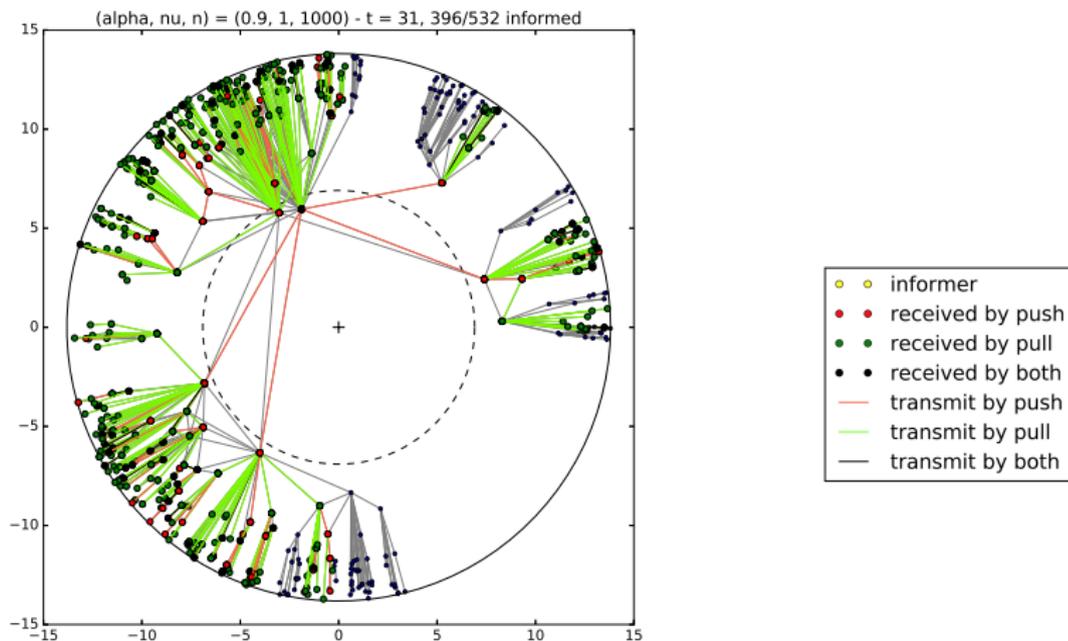


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8, 1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

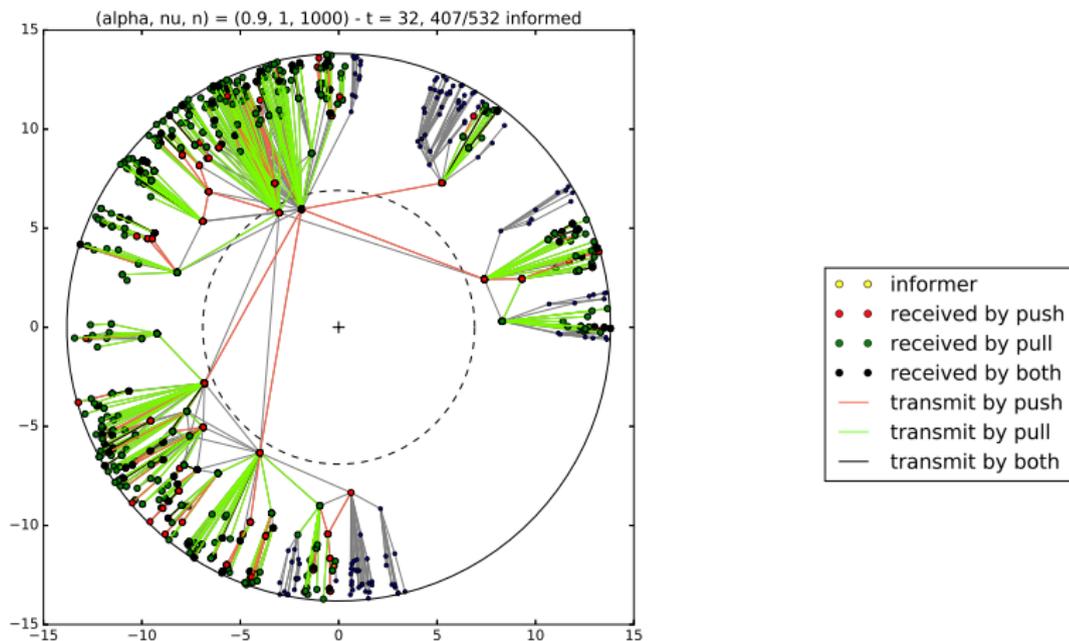


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

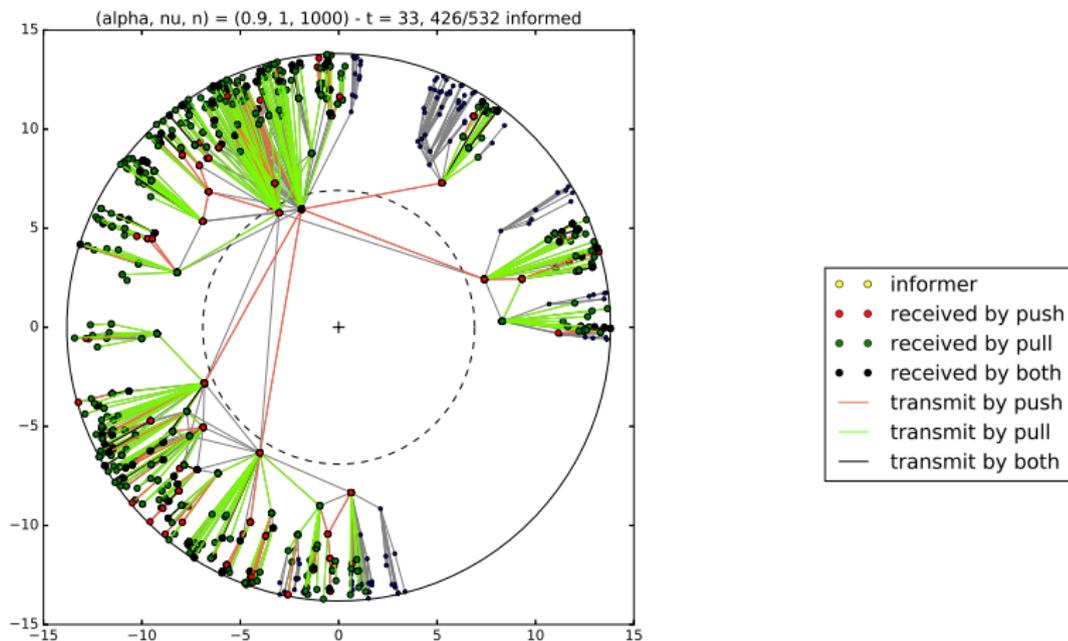


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8, 1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

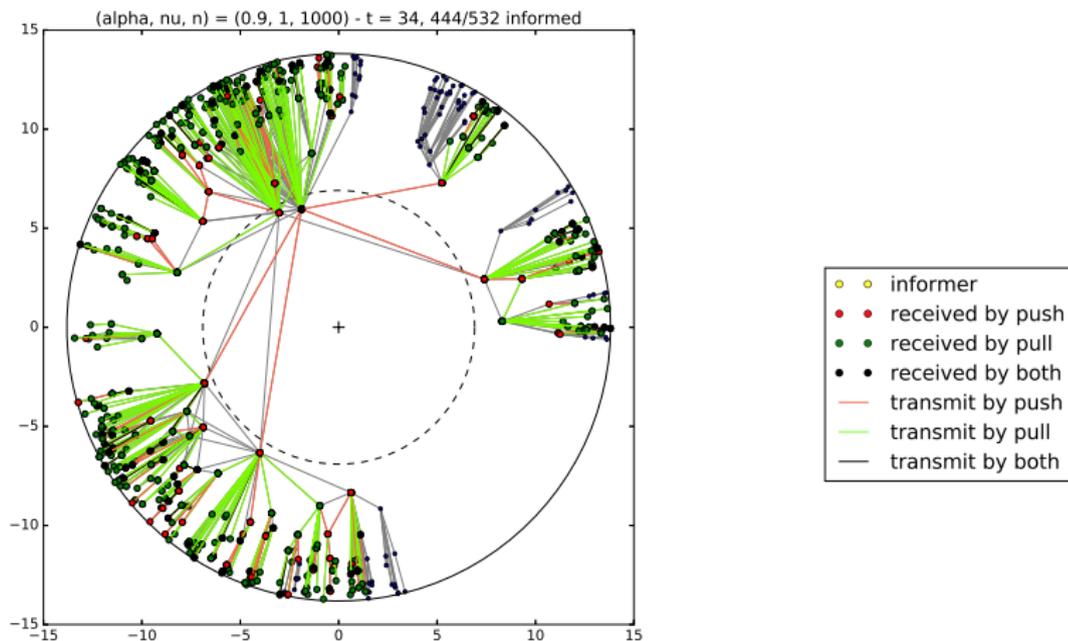


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8, 1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

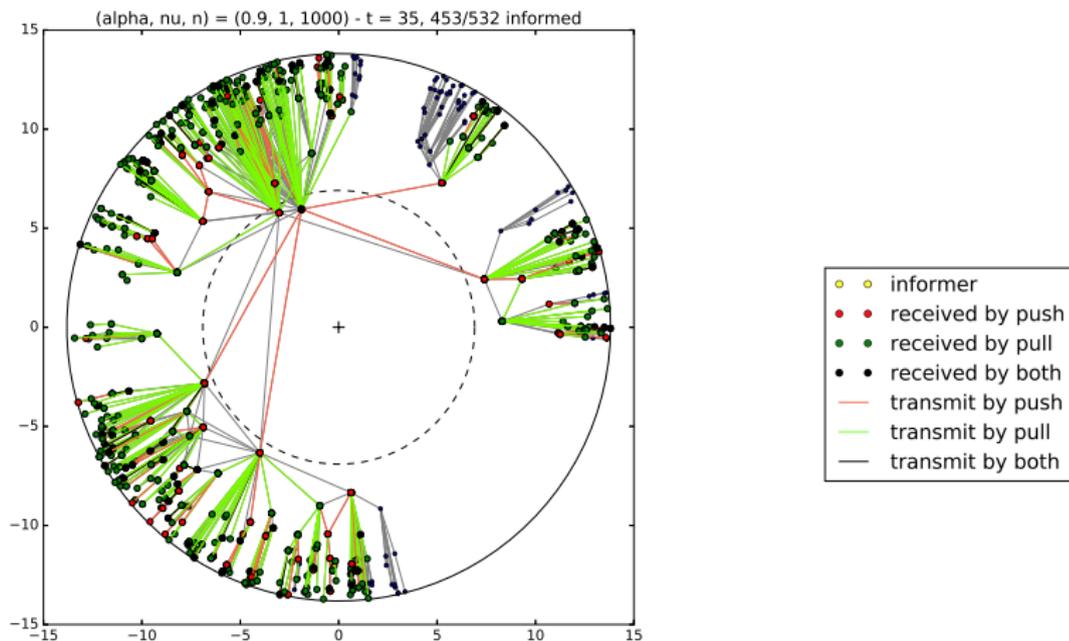


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8, 1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

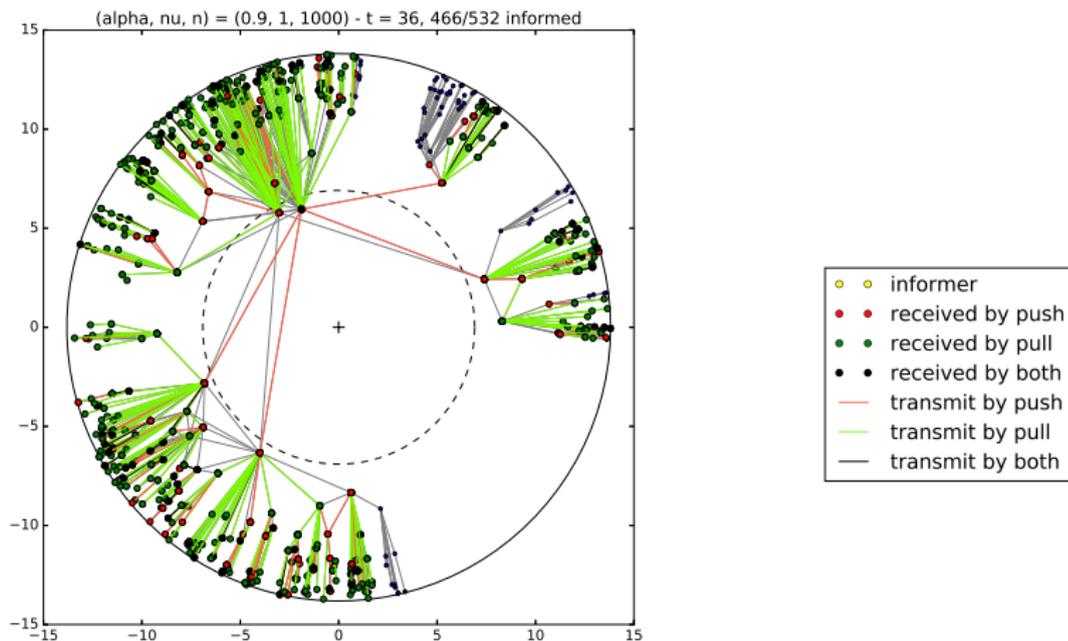


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

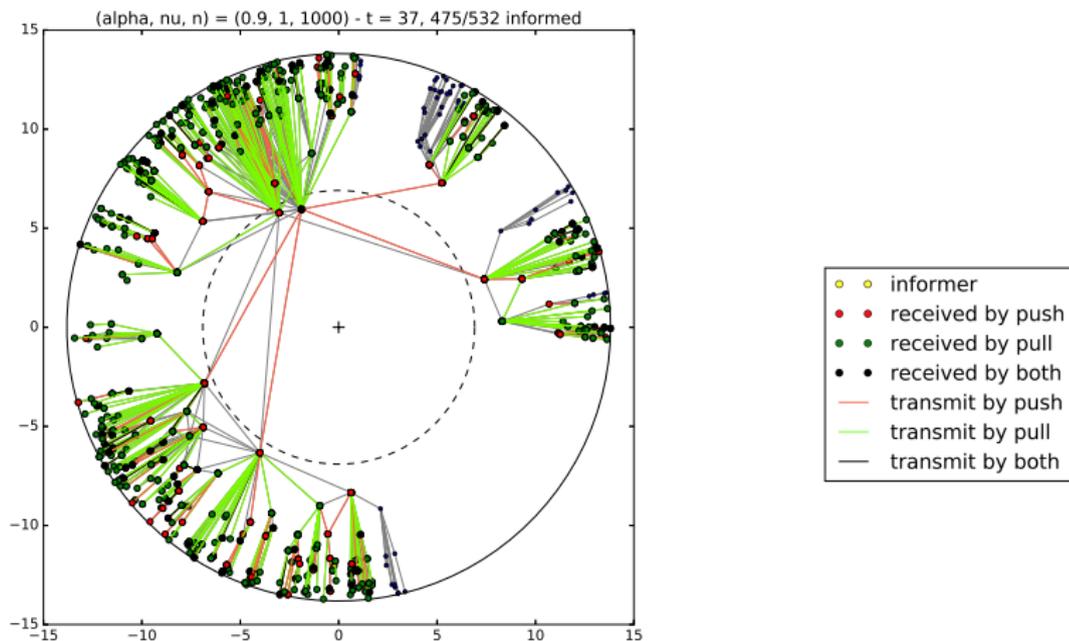


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8, 1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

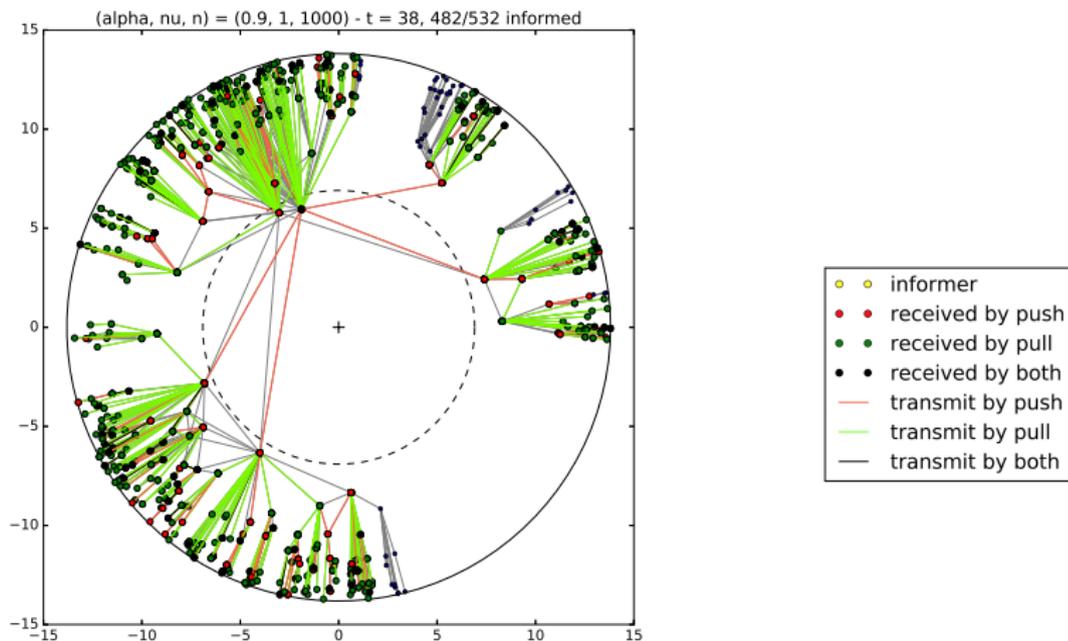


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

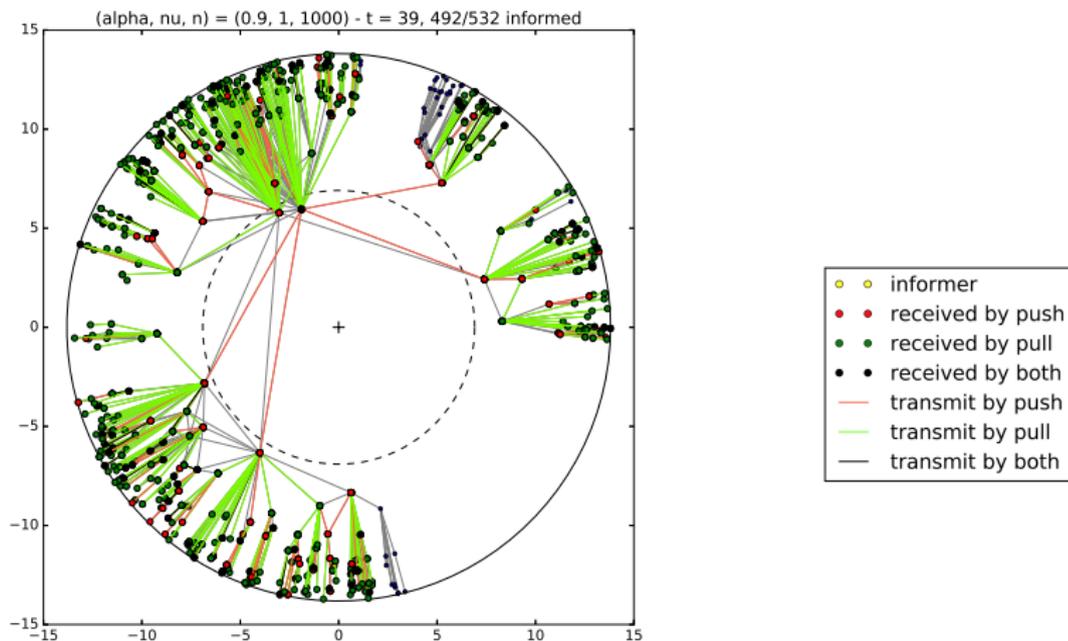


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8, 1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

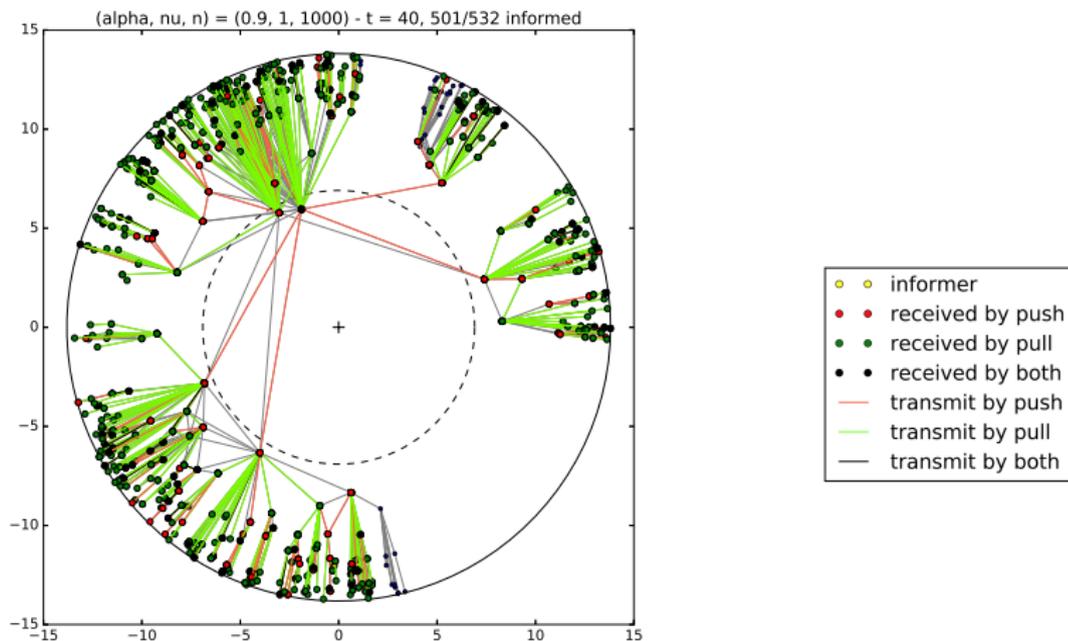


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8, 1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

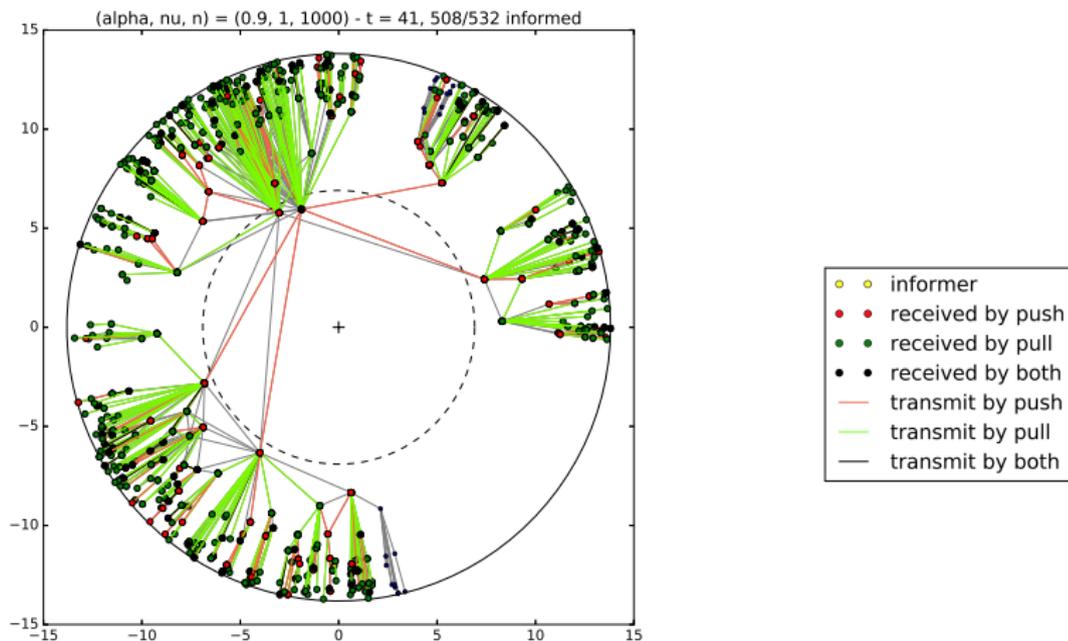


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8, 1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

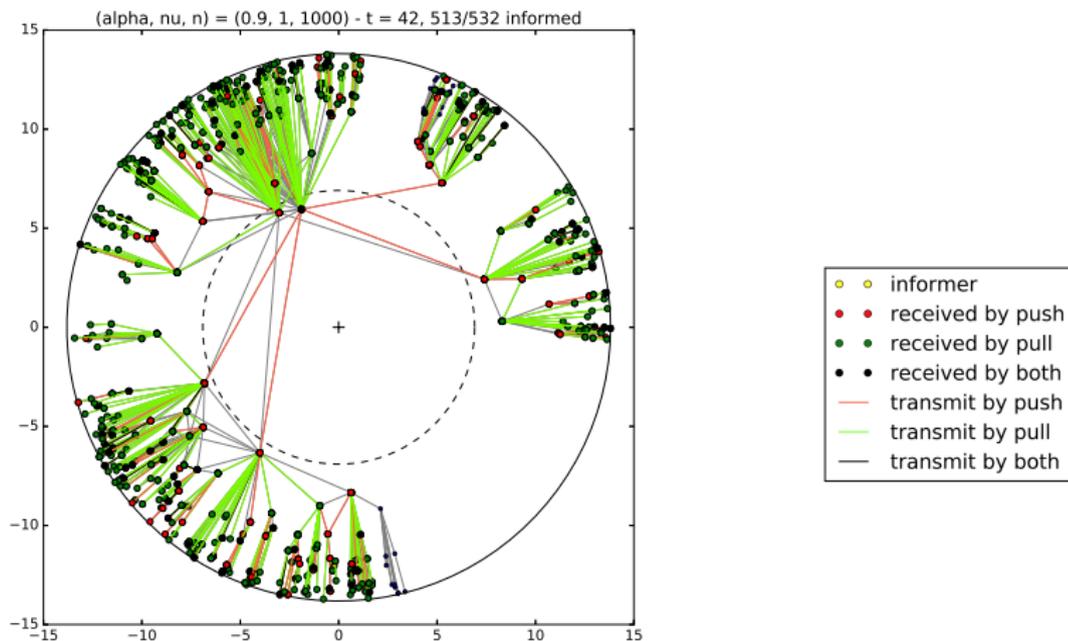


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8, 1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

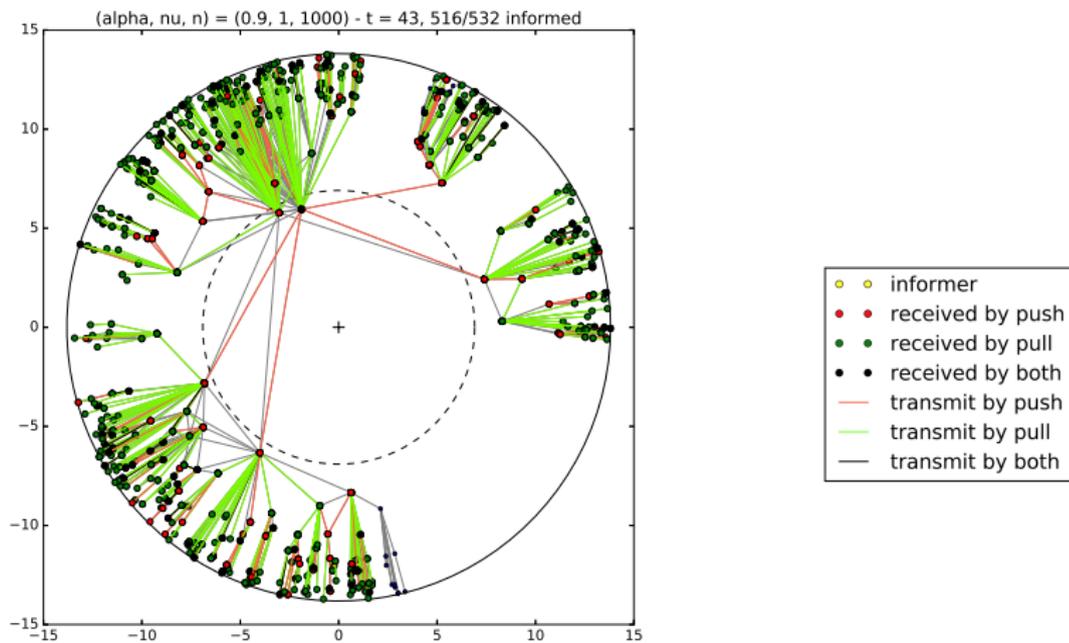


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8, 1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

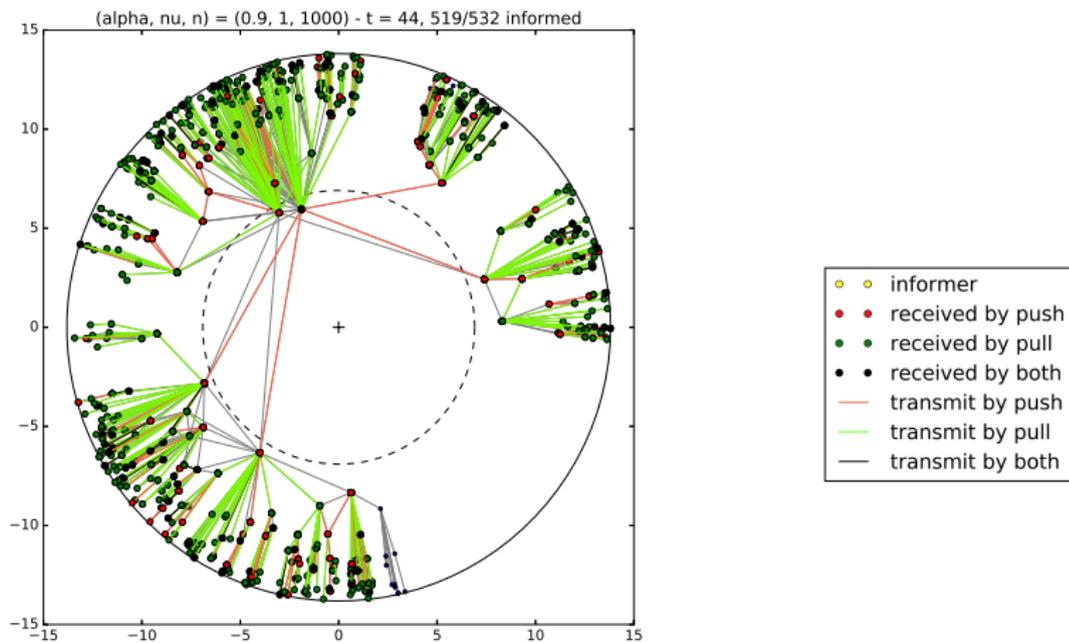


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8, 1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

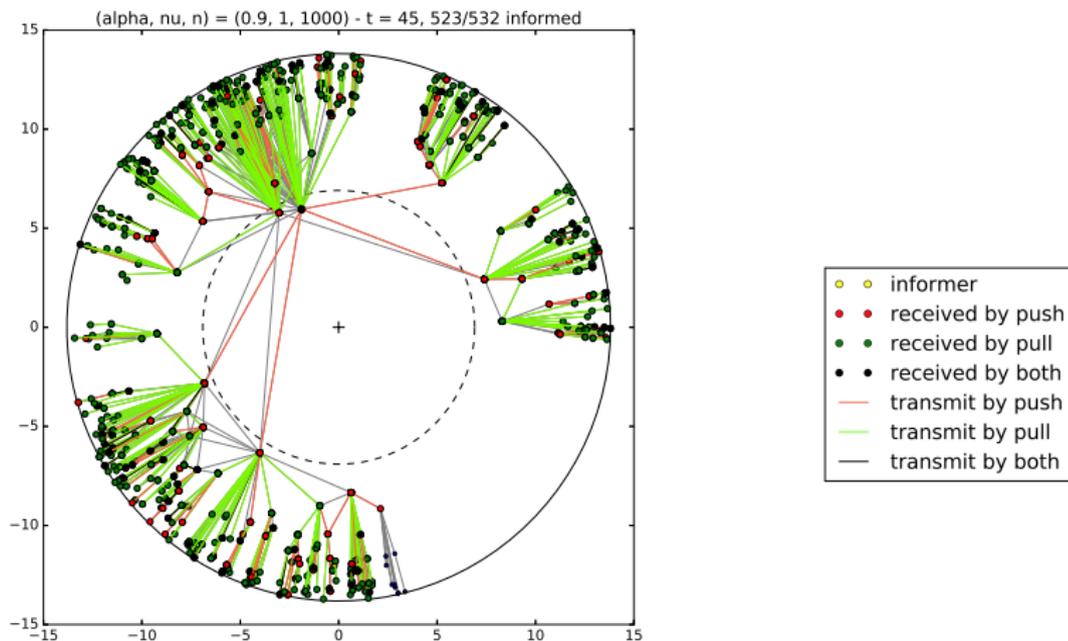


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8, 1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

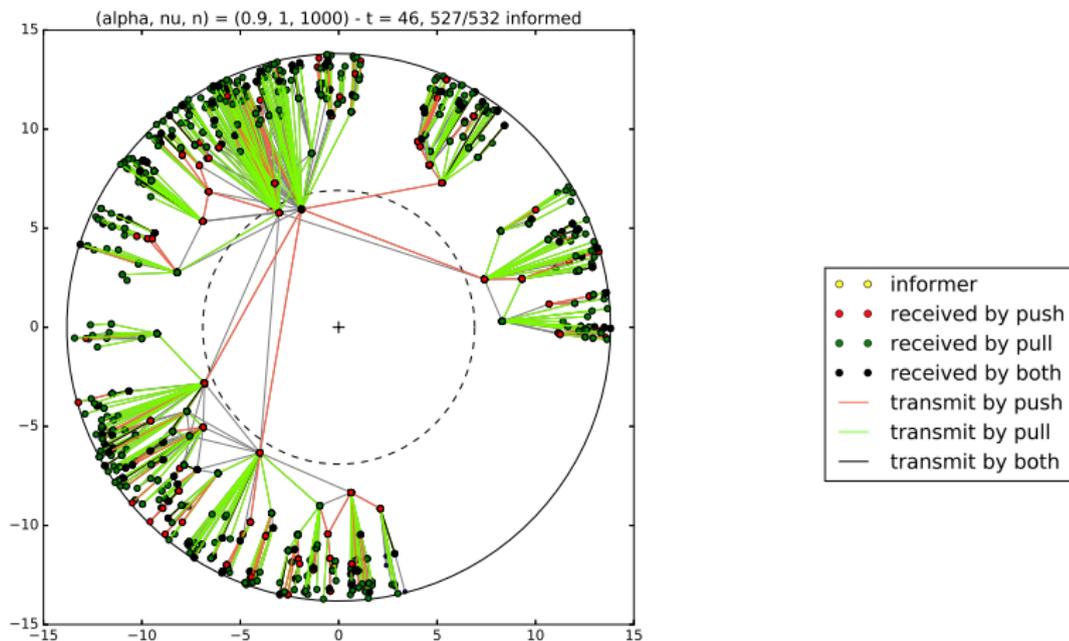


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8, 1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

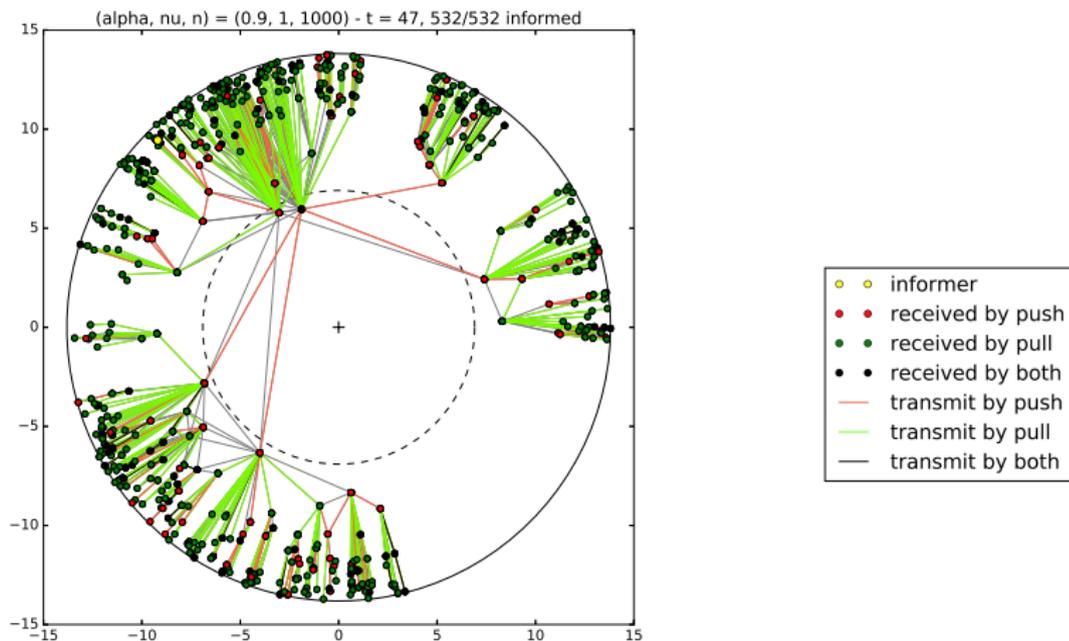


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8, 1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

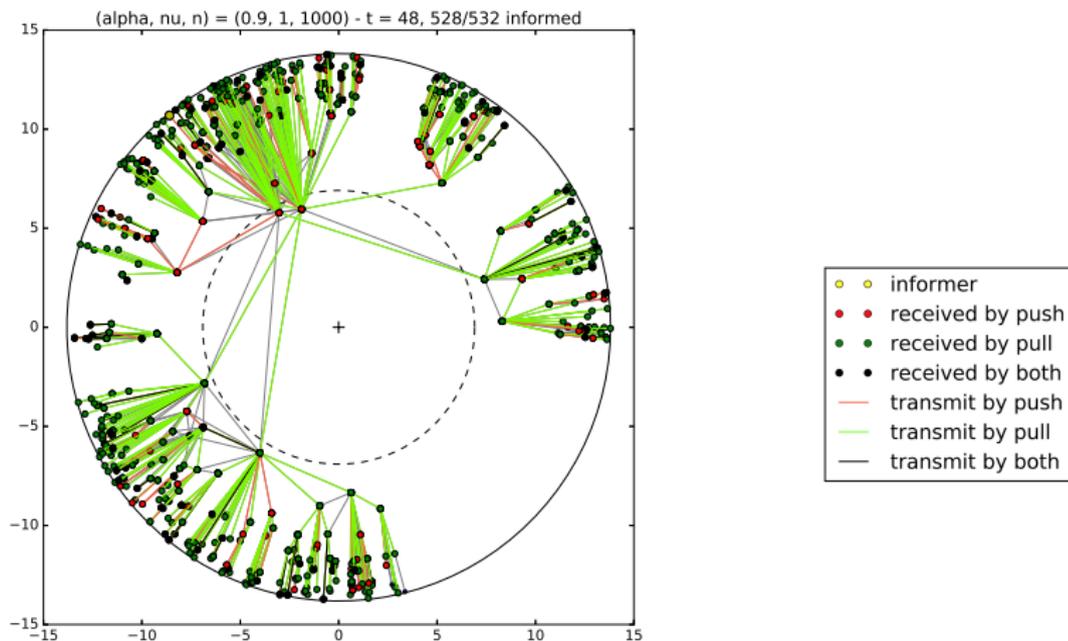


FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Le modèle push & pull

Une simulation

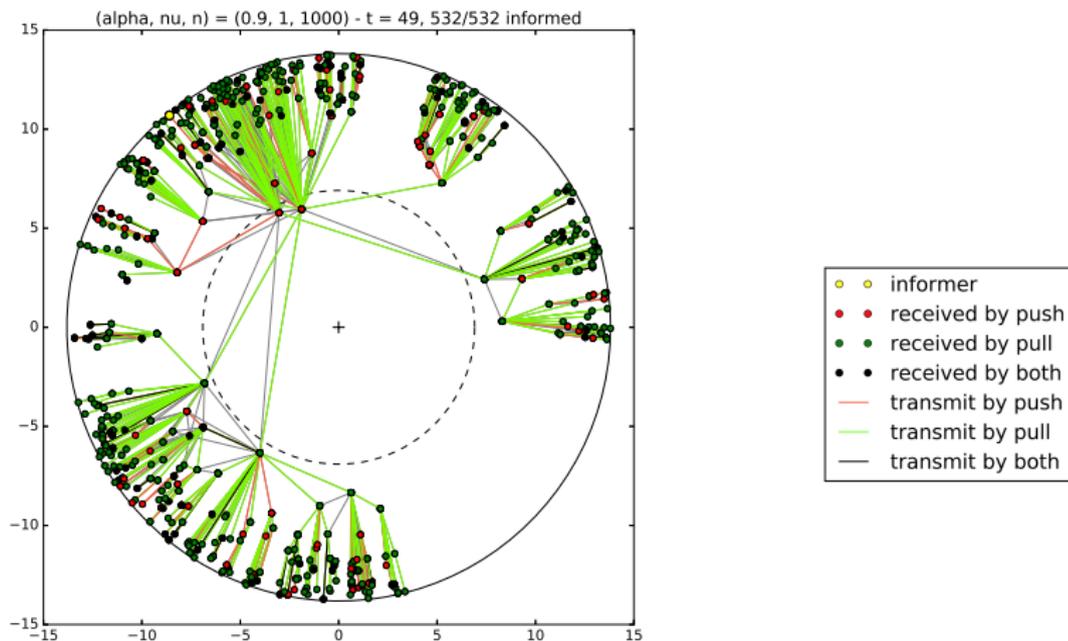


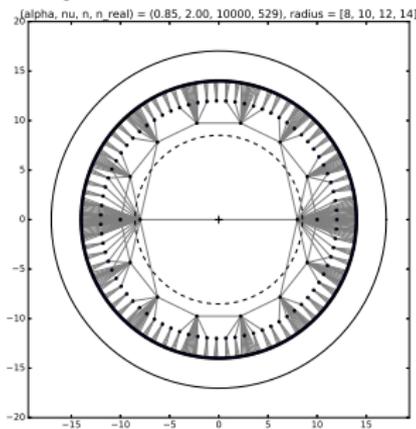
FIGURE – une simulation dans $\mathcal{G}_{0.8,1}(1000)$

Conjecture (Temps de propagation)

L'espérance du temps de propagation dans $\mathcal{G}_{\alpha, \nu}(n)$ est de l'ordre de $n^{\alpha-1/2}$.

Travail réalisé pour obtenir cette conjecture et essayer de la démontrer :

- ✓ nombreuses simulations de propagations,
- ✓ recherche de graphes auxiliaires qui ne sont plus aléatoires mais possèdent des propriétés de propagation similaires
- ✓ considération poussée du cas "push" sur certains graphes auxiliaires.



Ce stage a été l'occasion :

- ✓ de me confronter à un sujet de recherche d'actualité,
- ✓ de mettre en pratique les connaissances apprises en cours,
- ✓ d'apprendre d'autres manières de raisonner en probabilités (et plus spécifiquement en théorie des graphes),
- ✓ de réaliser de nombreuses simulations.

Toutefois :

- ✗ il reste encore du travail pour démontrer le résultat souhaité,
- ✗ la partie théorique du sujet m'a parue compliquée, mes résultats sont assez modestes.



M. Bode, N. Fountoulakis, and T. Müller.

On the largest component of a hyperbolic model of complex networks.

The Electronic Journal of Combinatorics, 22, August 2015.



M. Bode, N. Fountoulakis, and M. Müller.

The probability of connectivity in a hyperbolic model of complex networks.

Random Structures & Algorithms, 49(1) :65–94, January 2016.



M. Boguñá, F. Papadopoulos, and D. Krioukov.

Sustaining the Internet with hyperbolic mapping.

Nature Communications, 1 :62, September 2010.



N. Fountoulakis and T. Müller.

Law of large numbers for the largest component in a hyperbolic model of complex networks.

ArXiv e-prints, April 2016.



L. Gugelmann, K. Panagiotou, and U. Peter.

Random Hyperbolic Graphs : Degree Sequence and Clustering.

ArXiv e-prints, May 2012.



M. Kiwi and D. Mitsche.

Spectral Gap of Random Hyperbolic Graphs and Related Parameters.

ArXiv e-prints, June 2016.



M. Kiwi and D. Mitsche.

On the second largest component of random hyperbolic graphs.

ArXiv e-prints, December 2017.



D. Krioukov, F. Papadopoulos, M. Kitsak, A. Vahdat, and M. Boguñá.

Hyperbolic geometry of complex networks.

Phys. Rev. E, 82 :036106, September 2010.



M. Penschuck.

Generating Practical Random Hyperbolic Graphs in Near-Linear Time and with Sub-Linear Memory.

In Costas S. Iliopoulos, Solon P. Pissis, Simon J. Puglisi, and Rajeev Raman, editors, *16th International Symposium on Experimental Algorithms (SEA 2017)*, volume 75 of *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, pages 26 :1–26 :21, Dagstuhl, Germany, 2017. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik.

MERCI!